УДК 621.3:537.8 DOI 10.46960/2658-6754_2022_2_30

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА ЧЕРЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ЧАСТЬ 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОТНОСТИ ТОКА

Е.Н. Меньшов
Ульяновский государственный технический университет
Ульяновск, Россия
ORCID: 0000-0003-2668-9603 e-mail: raynd2@rambler.ru

Представлена математическая модель вектора Пойнтинга вращающейся составляющей электромагнитной структуры, на основе которой построены модели плотности тока и магнитного момента. Источником магнитного момента является ток неизвестной физической природы, создаваемый циркуляцией постоянной составляющей потока электромагнитной мощности при наличии в системе электростатического потенциала.

Ключевые слова: векторный потенциал, вращающее электромагнитное поле, классический радиус электрона, математическое моделирование электромагнитного поля, проекция магнитного момента, проекция момента импульса, электростатический потенциал.

Для цитирования: Меньшов Е.Н. Представление вектора Пойнтинга через электрические характеристики электротехнических систем. Часть 2. Моделирование плотности тока // Интеллектуальная Электротехника. 2022. № 2. С. 30-45. DOI: 10.46960/2658-6754_2022_2_30

REPRESENTATION OF THE POYNTING VECTOR VIA ELECTRICAL CHARACTERISTICS OF ELECTRICAL SYSTEMS. PART 2. SIMULATION OF CURRENT DENSITY

E.N. Menshov
Ulyanovsk State Technical University
Ulyanovsk, Russia
ORCID: 0000-0003-2668-9603 e-mail: raynd2@rambler.ru

Abstract. A mathematical model of the Poynting vector of the rotating component of the electromagnetic structure is constructed, on the basis of which models of the current density and magnetic moment are constructed. The source of the magnetic moment is a current of unknown physical nature, created by the circulation of the constant component of the electromagnetic power flow in the presence of an electrostatic potential in the system.

Key words: vector potential, rotating electromagnetic field, classical electron radius, electromagnetic field mathematical modeling, magnetic moment projection, angular momentum projection, electrostatic potential.

For citation: E.N. Menshov, "Representation of the Poynting vector via electrical characteristics of electrical systems. Part 2. Simulation of current density", *Smart Electrical Engineering*, no. 2, pp. 30-45, 2022. DOI: 10.46960/2658-6754_2022_2_30

I. Введение

Для анализа и моделирования электрических макро- и микросистем с распределенными параметрами в [1] предложена модифицированная формула вектора Пойнтинга, построенная на учете приложенного к системе напряжения U и вектора эквивалентной плотности тока $\vec{J}$, направление и локализация которого соответствует потоку вектора Пойнтинга. Этот подход требует уточнения в вопросе моделирования распределения эквивалентной плотности тока. В частности, эквивалентную плотность тока J можно вычислять по типовой формуле:

$$J = k_I \frac{I}{S_{(r)}}, \tag{1}$$

где I – сила тока системы; $S(r)$ – площадь сечения формы потока мощности электромагнитного поля; k_I – коэффициент пропорциональности, вычисляемый по формуле баланса между потоком вектора плотности тока и током системы.

Ток системы является источников магнитного поля системы. Часть этого поля в области передачи потока электромагнитной энергии связана с эквивалентной плотностью тока. Такая связь обусловлена, например, формулой закона полного тока. Также полезность модифицированной формулы вектора Пойнтинга продемонстрирована в [1] на примере получения положительного решения фундаментальной задачи.

Целью настоящей работы является дальнейшее изучение фундаментальной основы модифицированной формулы вектора Пойнтинга в рамках расширения возможностей классической теории электромагнитного поля (ЭМП). В основу теоретической базы положен расчетный аппарат теоретической и физической электротехник.

II. Постановка задачи

В теории ЭМП используются два типа калибровочных соотношений для электродинамических потенциалов:

– калибровка Лоренца:

$$div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0; \tag{2}$$

– кулоновская калибровка:

$$div\vec{A} = 0. \tag{3}$$

Традиционно считалось, что выбор типа калибровочных соотношений диктуется только удобством решаемой задачи [2], так как они приводят к одинаковым волновым уравнениям относительно силовых характеристик поля $\vec{E}$ – вектора напряженности электрического поля и $\vec{B}$ – вектора индукции магнитного поля.

Обратим внимание на то, что калибровка Лоренца (2) выражает нестационарное уравнение непрерывности векторного потенциала, а кулоновская калибровка (3) выражает стационарное уравнение непрерывности векторного потенциала [3]. Поэтому в первом случае волновые уравнения потенциалов наиболее удобны для описания волн, порождаемых нестационарными токами и зарядами.

Во втором случае система волновых уравнений удобна для описания волн, порождаемых стационарными токами и зарядами. Например, для вакуума эта система уравнения имеют традиционный вид:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial V}{\partial t}; \tag{4}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{5}$$

Особенностью системы уравнений (4), (5) в том, что здесь скалярный потенциал V определяется мгновенным распределением зарядов так, как будто они покоятся [4]. Мгновенное распределение зарядов непрерывно изменяется во времени $\rho = \rho(t)$. Учитывая, что напряженность электрического поля связана со скалярным потенциалом $\vec{E}_k = -\nabla V$, то второе слагаемое в правой части (4) становится током смещения кулоновского поля:

$$\frac{1}{\mu_0 c^2}\nabla\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial \vec{E}_k}{\partial t} = -\vec{J}_k. \qquad (6)$$

Обратимся к фундаментальному стационарному процессу – орбитальному перемещению заряда (электрона) в центрально симметричном поле (протона). Для такой задачи в [5] разработан нетрадиционный метод решения (4).

Суть метода в том, что составляющие левой и правой частей (4) усреднялись за время T_0 периода орбитального вращения электрона. Вычислением установлено, что усредненные за период движения заряда по замкнутой произвольной стационарной орбите электронный ток и ток смещения кулоновского поля взаимно компенсируются. Поэтому волновое уравнение (4) относительно усредненной за период вращения проекции векторного потенциала на нормаль к неподвижной полуплоскости становится однородным (принуждающая составляющая в правой части дифференциального уравнения (ДУ) становится равной нулю):

$$\nabla^2 \left\langle A_n \right\rangle_{T_0} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \left\langle A_n \right\rangle_{T_0}}{\partial t^2} = 0, \qquad (7)$$

где $\left\langle A_n \right\rangle_{T_0}$ – усредненная за период T_0 вращения электрона проекция векторного потенциала на нормаль к неподвижной полуплоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты.

Однородное волновое уравнение (7) описывает стационарный (в соответствии с исходными условиями задачи) свободный процесс с собственной частотой колебания ω_c, которая физически связана с частотой ω_0 вращения электрона ($\omega_c = \eta\omega_0(r)$). Решение ДУ (7) определялось в комплексной форме:

$$\left\langle \dot{A}_n \right\rangle_{T_0} = \dot{A}_{0n}\left(\vec{r}\right)e^{j\omega_c t}. \qquad (8)$$

При этом (7) для усредненного стационарного процесса примет вид уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{A}_{0n}\left(\vec{r}\right) + \frac{\omega_c^2}{c^2}\dot{A}_{0n}\left(\vec{r}\right) = 0. \qquad (9)$$

Такое уравнение в центрально-симметричном поле допускает решение, подобное решению стационарного уравнения Шредингера для атома водорода [5]:

$$\dot{A}_{0n}(\vec{r}) = R(r)\dot{Y}(\theta,\varphi). \tag{10}$$

где $R(r)$ – радиальная функция; $\dot{Y}(\theta,\varphi) = P(\theta)\dot{\Phi}(\varphi)$ – сферическая функция; $P(\theta)$ – присоединенные функции Лежандра [6-7].

Комплексная функция $\dot{\Phi}(\phi) = C_{0n}e^{j(m\varphi+\varphi_{0n})}$ с постоянной интегрирования $\dot{C}_{0n} = C_{0n}e^{j\varphi_{0n}}$ есть комплексная форма общего решения ДУ:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0,$$

где с учетом требования однозначности функции $\Phi(\varphi)$ значение m должно быть целым натуральным числом (0, ±1, ±2, …) и в квантовой механике называется магнитным квантовым числом.

Таким образом, (8) с учетом (9) в сферической системе координат примет вид:

$$\left\langle \dot{A}_n \right\rangle_{T_0} = C_{0n}R(r)P(\theta)e^{j(m\varphi+\omega_{ck}t+\varphi_{0n})}. \tag{11}$$

где ω_{ck} – квантованные значения частот колебаний векторного потенциала.

Выводы

1. В [5] показано, что классическое приближение разрешает движение электрона в центрально-симметричном силовом поле по дискретным орбитам.
2. Согласно [8, с. 13], кулоновская калибровка порождает поперечные моды векторного потенциала.
3. Выражение (11) описывает вращающую полевую структуру векторного потенциала (стационарную замкнутую волну). Угловая скорость вращения замкнутой волны вокруг оси z: dφ/dt = –ωck /m.
4. Ток смещения (6) обусловлен потенциальным кулоновским полем, его $\mathrm{rot}\vec{J}_k = 0$, поэтому этот ток не может создавать магнитный момент.

Таким образом, вращающая полевая структура векторного потенциала может порождать замкнутую электромагнитную волну, которая будет создавать циркуляцию потока вектора Пойнтинга. В соответствии с раскрытой в [1] формулой с циркулирующим потоком вектора Пойнтинга связан некоторый ток, который может порождать магнитный момент.

Поэтому непосредственной задачей данной работы является моделирование и исследование тока, связанного с вектором Пойнтинга.

III. Восстановление составляющих векторного потенциала $\vec{A}$

В декартовой системе координат вектор $\vec{A}$ и его проекция на единичный направляющий вектор $\vec{e}_n$ примут соответствующий вид:

$$\begin{gathered}\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z = \vec{A}_{xy} + A_z\vec{e};\\ \left(\vec{A}\vec{e}_n\right) = \left(\vec{A}_{xy}\vec{e}_n\right) = A_x\alpha_n + A_y\beta_n,\end{gathered} \tag{12}$$

где $\vec{e}_n = \alpha_n\vec{e}_x + \beta_n\vec{e}_y$ – нормальный вектор к фиксированной неподвижной плоскости *S*, проходящей через ось орбиты *Oz*. Применяя в (11) обозначение $\Psi = m\varphi + \omega_{ck}t$ и подставляя в (12), получим:

$$\left\langle \dot{\vec{A}}\vec{e}_n \right\rangle_{T_0} = \left\langle A_n \right\rangle_{T_0} = C_{0n}A_m\left(r,\theta\right)e^{j(\psi+\varphi_{0n})} = \alpha_n\left\langle \dot{A}_x \right\rangle_{T_0} + \beta_n\left\langle \dot{A}_y \right\rangle_{T_0}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (9) (аналогично как в [5] при $t = 0$), получим при фиксированном, но произвольном векторе $\vec{e}_n$ два независимых уравнения Гельмгольца:

$$\begin{gathered}\nabla^2\dot{A}_{0x}\left(\vec{r}\right) + \frac{\omega_c^2}{c^2}\dot{A}_{0x}\left(\vec{r}\right) = 0;\\ \nabla^2\dot{A}_{0y}\left(\vec{r}\right) + \frac{\omega_c^2}{c^2}\dot{A}_{0y}\left(\vec{r}\right) = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Выражения решений ДУ (14) аналогичны выражению (10):

$$\begin{gathered}\dot{A}_{0x}\left(\vec{r}\right) = C_xR\left(r\right)P\left(\theta\right)e^{j\left(m\varphi+\varphi_x\right)};\\ \dot{A}_{0y}\left(\vec{r}\right) = C_yR\left(r\right)P\left(\theta\right)e^{j\left(m\varphi+\varphi_y\right)},\end{gathered} \tag{15}$$

где $\dot{C}_x = C_xe^{j\varphi_x}$ и $\dot{C}_y = C_ye^{j\varphi_y}$ постоянные интегрирования.

Для согласования постоянных интегрирования представим ДУ (14) в виде двух систем ДУ первых порядков:

$$\frac{d\dot{A}_{0y}}{d\varphi}=-m\dot{A}_{0x};\frac{d\dot{A}_{0x}}{d\varphi}=m\dot{A}_{0y}; \qquad (16)$$

$$\frac{d\dot{A}_{0y}}{d\varphi}=m\dot{A}_{0x};\frac{d\dot{A}_{0x}}{d\varphi}=-m\dot{A}_{0y}. \qquad (17)$$

Системе (16) соответствуют условия: $C_x = C_y = C_0$; $\varphi_y = \varphi_x + 90^{\circ}$, а системе (17) – условия:

$$C_x=C_y=C_0;\varphi_y=\varphi_x-90^{\circ}. \qquad (18)$$

Так как угловая скорость вращения замкнутой волны вокруг оси z отрицательная ($-\omega_{ck}/m$), то вращение направлено в противоположную сторону координате φ, т.е. по часовой стрелке. Поэтому выбираем условия (18), и (15) примут вид:

$$\left\langle \dot{A}_x \right\rangle_{T_0}=Y_0e^{j(\psi+\varphi_x)};\left\langle \dot{A}_y \right\rangle_{T_0}=Y_0e^{j\left(\psi+\varphi_x-90^{\circ}\right)}, \qquad (19)$$

в которых использованы следующие обозначения:

$$Y_0=C_0R(r)P(\theta);\psi=m\varphi+\omega_{ck}t. \qquad (20)$$

На основе (19) при соответствующих ортах $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ декартовых координат запишем вращающийся параллельно плоскости орбиты вектор:

$$\left\langle \dot{\vec{A}}_{xy} \right\rangle_{T_0}=\vec{e}_xY_0e^{j(\psi+\varphi_x)}+\vec{e}_yY_0e^{j\left(\psi+\varphi_x-90^{\circ}\right)}. \qquad (21)$$

Применяя классическую формулу $Re\dot{A}=0{,}5\left(\dot{A}+\dot{A}^*\right)$, запишем вращающийся вектор $\left\langle \vec{A}_{xy} \right\rangle_{T_0}$ (21) в вещественной форме:

$$\left\langle \vec{A}_{xy} \right\rangle_{T_0}=Y_0\left\{\vec{e}_x\cos\left(\psi+\varphi_x\right)+\vec{e}_y\sin\left(\psi+\varphi_x\right)\right\}. \qquad (22)$$

IV. Определение вектора Пойнтинга

Выразим вектор Пойнтинга через векторный потенциал ЭМП [4].

Запишем в комплексно-сопряженной форме полный векторный потенциал $\left\langle \dot{\vec{A}} \right\rangle_{T_0} = \dot{\vec{A}}_m e^{j\omega_{ck}t}$, $\left\langle \dot{\vec{A}}^* \right\rangle_{T_0} = \dot{\vec{A}}_m^* e^{-j\omega_{ck}t}$, то будем иметь:

$$\left\langle \dot{\vec{E}} \right\rangle_{T_0} = -j\omega_{ck} \left\langle \dot{\vec{A}} \right\rangle_{T_0}, \qquad \left\langle \dot{\vec{E}}^* \right\rangle_{T_0} = j\omega_{ck} \left\langle \dot{\vec{A}}^* \right\rangle_{T_0};$$

$$\left\langle \dot{\vec{H}} \right\rangle_{T_0} = \frac{1}{\mu_0}\left[\nabla \left\langle \dot{\vec{A}} \right\rangle_{T_0}\right]; \qquad \left\langle \dot{\vec{H}}^* \right\rangle_{T_0} = \frac{1}{\mu_0}\left[\nabla \left\langle \dot{\vec{A}}^* \right\rangle_{T_0}\right].$$

Учитывая кулоновскую калибровку (3), вычислим выражения:

$$\left\langle \dot{\vec{\Pi}}_1 \right\rangle_{T_0} = \left[\left\langle \dot{\vec{E}} \right\rangle_{T_0} \left\langle \dot{\vec{H}}^* \right\rangle_{T_0}\right] = -\frac{j\omega_{ck}}{\mu_0}\left\{\nabla\left(\left\langle \dot{\vec{A}} \right\rangle_{T_0} \left\langle \dot{\vec{A}}^* \right\rangle_{T_0}\right)\right\};$$

$$\left\langle \dot{\vec{\Pi}}_2 \right\rangle_{T_0} = \left[\left\langle \dot{\vec{E}}^* \right\rangle_{T_0} \left\langle \dot{\vec{H}} \right\rangle_{T_0}\right] = \frac{j\omega_{ck}}{\mu_0}\left\{\nabla\left(\left\langle \dot{\vec{A}}^* \right\rangle_{T_0} \left\langle \dot{\vec{A}} \right\rangle_{T_0}\right)\right\}.$$

Значение постоянной составляющей вектора Пойнтинга вращающегося ЭМП определим по типовой формуле [9]:

$$\left\langle \vec{\Pi}_0 \right\rangle_{T_0} = 0{,}25\left\{\left\langle \dot{\vec{\Pi}}_1 \right\rangle_{T_0} + \left\langle \dot{\vec{\Pi}}_2 \right\rangle_{T_0}\right\} = 0.$$

Таким образом, орбитальное ЭМП не излучает энергию.

Определим силовые характеристики вращающегося ЭМП.

Взяв производную по времени от составляющей векторного потенциала (22), получим выражение напряженности электрического поля:

$$\left\langle \vec{E}_{xy} \right\rangle_{T_0} = -\omega_{ck} Y_0 \left\{-\vec{e}_x \sin\left(\psi + \varphi_x\right) + \vec{e}_y \cos\left(\psi + \varphi_x\right)\right\}. \tag{23}$$

При этом индукция магнитного поля $\left\langle \vec{B}_{xy} \right\rangle_{T_0} = \mathrm{rot}\left\langle \dot{\vec{A}}_{xy} \right\rangle_{T_0}$ в декартовой системе координат будет иметь вид:

$$\left\langle \vec{B}_{xy} \right\rangle_{T_0} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Y_0\cos(\psi + \varphi_x) & Y_0\sin(\psi + \varphi_x) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[-\vec{e}_x \sin(\psi + \varphi_x) + \vec{e}_y \cos(\psi + \varphi_x)\right]\frac{\partial Y_0}{\partial z} + \left[\sin(\psi + \varphi_x)\frac{\partial Y_0}{\partial x} - \cos(\psi + \varphi_x)\frac{\partial Y_0}{\partial y} + \right.$$

$$+Y_0\left\{\frac{\partial\sin(\psi+\varphi_x)}{\partial x}-\frac{\partial\cos(\psi+\varphi_x)}{\partial y}\right\}\Bigg]\vec{e}_z\,.$$

Учтя производные от переменных сферической системы координат:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi\,\sin\theta;\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi\,\sin\theta;\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\cos\varphi\,\cos\theta}{r};\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r};\qquad(24)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{r\,\sin\theta};\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\cos\varphi}{r\,\sin\theta};\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\qquad(25)$$

получим [8]:

$$\begin{gathered}\left\langle\vec{B}_{xy}\right\rangle_{T_0}=-\left[\vec{e}_x\sin\left(\psi+\varphi_x\right)-\vec{e}_y\cos\left(\psi+\varphi_x\right)\right]\left(\frac{\partial Y_0}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial Y_0}{r\,\partial r}\sin\theta\right)+\\+\vec{e}_z\left[\frac{\partial Y_0}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial Y_0}{r\,\partial\theta}\cos\theta+\frac{mY_0}{r\sin\theta}\right]\sin\left(\psi-\varphi+\varphi_x\right).\end{gathered}\qquad(26)$$

Используя выражения (23) и (26), получим вектор Пойнтинга вращающейся составляющей ЭМП:

$$\begin{gathered}\left\langle\vec{\Pi}_{xy}\right\rangle_{T_0}=-\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial\left\langle\vec{A}_{xy}\right\rangle_{T_0}}{\partial t}\left[\nabla\left\langle\vec{A}_{xy}\right\rangle_{T_0}\right]\right]=-\frac{\omega_{ck}Y_0}{\mu_0}\times\\ \times\begin{bmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ -\sin\left(\psi+\varphi_x\right) & \cos\left(\psi+\varphi_x\right) & 0\\ -\frac{\partial Y_0}{\partial z}\sin\left(\psi+\varphi_x\right) & \frac{\partial Y_0}{\partial z}\cos\left(\psi+\varphi_x\right) & \Lambda\sin\left(\psi-\varphi+\varphi_x\right)\end{bmatrix}=\\ =-\frac{\omega_{ck}Y_0}{\mu_0}\Lambda\vec{e}_\psi\sin\left(\psi-\varphi+\varphi_x\right);\end{gathered}\qquad(27)$$

$$\Lambda=\left[\frac{\partial Y_0}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial Y_0}{r\,\partial\theta}\cos\theta+\frac{mY_0}{r\sin\theta}\right];\qquad(28)$$

$$\vec{e}_\psi=\left[\vec{e}_x\cos\left(\psi+\varphi_x\right)+\vec{e}_y\sin\left(\psi+\varphi_x\right)\right].\qquad(29)$$

Определим постоянную составляющую вектора Пойнтинга циркулирующей составляющей электромагнитного поля (21):

$$\left\langle \vec{\Pi}_{xy0} \right\rangle_{T_0} = \frac{j\omega_{ck}}{4\mu_0}\left\{\left[\left\langle \dot{\vec{A}}^*_{xy} \right\rangle_{T_0}\left[\nabla\left\langle \dot{\vec{A}}_{xy} \right\rangle_{T_0}\right]\right]-\left[\left\langle \dot{\vec{A}}_{xy} \right\rangle_{T_0}\left[\nabla\left\langle \dot{\vec{A}}^*_{xy} \right\rangle_{T_0}\right]\right]\right\}=$$
$$=\frac{j\omega_{ck}}{4\mu_0}\left\{\left\langle \dot{\vec{A}}^*_{xy} \right\rangle_{T_0}\nabla\left\langle \dot{\vec{A}}_{xy} \right\rangle_{T_0}-\left\langle \dot{\vec{A}}_{xy} \right\rangle_{T_0}\nabla\left\langle \dot{\vec{A}}^*_{xy} \right\rangle_{T_0}\right\}= \tag{30}$$
$$=-\frac{\omega_{ck}Y_0}{2\mu_0}\left[\vec{e}_x\left(Y_0\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial Y_0}{\partial y}\right)+\vec{e}_y\left(Y_0\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial Y_0}{\partial x}\right)\right]=-\frac{\omega_{ck}Y_0}{2\mu_0}\vec{\eta};$$

$$\vec{\eta}=\left(\frac{\partial Y_0}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial Y_0}{r\,\partial\theta}\cos\theta+\frac{mY_0}{r\sin\theta}\right)\left(-\vec{e}_x\sin\varphi+\vec{e}_y\cos\varphi\right)=\Lambda\vec{e}_\varphi, \tag{31}$$

где $\bar{e}_\varphi$ – азимутальный орт сферической и цилиндрической систем координат.

Таким образом, векторные линии постоянной составляющей вектора Пойнтинга совпадают с азимутальными координатными линиями, поэтому они замкнуты, и они охватывают ось z.

V. Моделирование эквивалентной плотности тока

Здесь решим обратную задачу – определим эквивалентную плотность тока неизвестной физической природы через постоянную составляющую вектора Пойнтинга (30) – (31):

$$\vec{J}_{\Pi 0}=\left\langle \vec{\Pi}_{xy0} \right\rangle_{T_0} U_0^{-1}, \tag{32}$$

где $U_0 = V_э - V(\infty) = V_э$ постоянное напряжение на поверхности микросистемы, равное некоторому эквивалентному потенциалу $V_э$, который не известен.

Учтем то, что поток вектора плотности тока (как и вектора Пойнтинга) циркулирует вокруг оси z. Это свойство позволяет обратиться к его магнитному моменту, обладающему физическим смыслом.

Причиной орбитального магнитного момента в рамках традиционных классических представлений является зарядовый ток, а в квантовой механике – это особый ток – ток плотности вероятности. При этом вращение заряда по орбите создает магнитный момент кратностью единицы, а ток плотности вероятности обуславливает магнитный момент кратностью m [6, с. 175-177].

Вектора плотностей тока (32) $\vec{J}_{\text{П}0} = -J_{\text{П}0}\vec{e}_{\varphi}$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости $x0y$, поэтому направление создаваемого магнитного момента совпадает с осью z.

Вычислим магнитный момент, создаваемый непрерывно распределенной плотностью тока по методике, излагаемой в учебной литературе по квантовой механике [6, с. 176]. Пусть через элемент площади ds_{φ}, нормальный азимутальной координатной линии φ, протекает элемент тока $dI = J_{\text{П}0}ds_{\varphi}$, создающий элемент магнитного момента $dM_{\text{П}z} = dIS$, где $S = \pi r^2\sin^2\theta$, $ds_{\varphi} = rdrd\theta$. Подставив (30) в (32), получим элемент магнитного момента $dM_{\text{П}z}$ и результирующую проекцию магнитного момента $M_{\text{П}z}$ на ось z соответственно:

$$dM_{\text{П}z} = -\vec{e}_z\frac{\pi\omega_{ck}}{2\mu_0 V_э}Y_0\Lambda r^3\sin^2\theta drd\theta;$$

$$\vec{M}_{\text{П}z} = -\vec{e}_z\frac{\pi\omega_{ck}}{2\mu_0 V_э}\int_0^{\infty} r^3dr\int_0^{\pi}Y_0\Lambda\sin^2\theta d\theta. \tag{33}$$

Подставляя (28) в (33), учитывая (20) и разбивая (33) на слагаемые, при этом обозначив $\cos\theta = \xi$, $\sigma = 2rZ/nr_{\text{Б}}$, где Ze – заряд ядра, $r_{\text{Б}}$ – радиус Бора [6, с. 138], получим:

$$\vec{M}_{\text{П}z} = -\vec{e}_z\frac{\pi\omega_{ck}C_0^2}{2\mu_0 V_э}\left(M_{\text{П}1} + M_{\text{П}2} + M_{\text{П}3}\right);$$

$$M_{\text{П}1} = m\int_0^{\infty}R^2(r)r^2dr\int_0^{\pi}P^2\sin\theta d\theta = m\int_0^{\infty}R^2(r)r^2dr\int_{-1}^{1}P^2(\xi)d\xi;$$

$$M_{\text{П}2} = \int_0^{\infty}R\frac{dR}{dr}r^3dr\int_0^{\pi}P^2\sin^3\theta d\theta = -\frac{3}{2}\int_0^{\infty}R^2r^2dr\int_{-1}^{1}P^2\left(1-\xi^2\right)d\xi;$$

$$M_{\text{П}3} = \int_0^{\infty}R^2r^2dr\int_0^{\pi}P\frac{dP}{d\theta}\cos\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}R^2r^2dr\int_{-1}^{1}P^2\left(1-3\xi^2\right)d\xi; \tag{34}$$

$$M_{\text{П}1} + M_{\text{П}2} + M_{\text{П}3} = (m-1)\left(\frac{nr_{\text{Б}}}{2Z}\right)^3\int_0^{\infty}R^2\sigma^2d\sigma\int_{-1}^{1}P^2(\xi)d\xi;$$

$$\vec{M}_{\text{П}z} = -\vec{e}_z(m-1)C_0^2\frac{\pi\omega_{ck}}{2\mu_0 V_э}\left(\frac{nr_{\text{Б}}}{2Z}\right)^3\int_0^{\infty}R^2\sigma^2d\sigma\int_{-1}^{1}P^2(\xi)d\xi.$$

Заметим, что направление магнитного момента $\vec{M}_{\text{П}z}$ связано с направлением тока правилом правого винта, а направление тока, согласно (32), определяется направлением вектора Пойнтинга $\left\langle \vec{\Pi}_{xy0} \right\rangle_{T_0}$, поэтому $\vec{M}_{\Pi z} = M_{\Pi z}\vec{e}_z$. Его источником является вращающаяся составляющая ЭМП, поэтому назовем его полевым магнитным моментом.

Из (34) следует, что полевая составляющая магнитного момента на ось z имеет кратность (m–1). Результирующий магнитный момент $\vec{M}_{\Pi z}$ состоит из полевого магнитного момента и магнитного момента движения заряженной частицы, которой в квантово-механическом представлении представляется через магнетон Бора $\mu_Б \left(-\mu_Б \vec{e}_z\right)$ [6, с. 177]. При этом значение результирующего магнитного момента должно соответствовать научно-обоснованному значению, равному $\mu_Б m$:

$$\vec{M}_z = \vec{M}_{\Pi z} - \mu_Б \vec{e}_z = -m\mu_Б \vec{e}_z .$$

Это возможно при условии соответствия в (34) постоянной интегрирования C_0^2 следующему выражению:

$$C_0^2 = 2\mu_Б V_э \left[\frac{\pi\omega_{ck}}{\mu_0} \left(\frac{n r_Б}{2Z} \right)^3 \int_0^\infty R^2 \sigma^2 d\sigma \int_{-1}^{1} P^2\left(\xi\right) d\xi \right]^{-1} . \qquad (35)$$

Таким образом, подставив (35) в (30), (32) и (34), получим математические модели вектора Пойнтинга, плотности тока и магнитного момента.

VI. Определение электростатического потенциала системы

Воспользуемся механическими свойствами электромагнитного поля, характеристиками которых являются вектор плотности импульса $\vec{g} = c^{-2}\vec{\Pi}$ и плотность момента импульса $\vec{k}_0 = \left[\vec{r}\vec{g}\right]$ [2]. Вычислим момент количества движения $\vec{L}_{\Pi z}$ вращающейся полевой структуры, используя типовую формулу и сферическую систему координат:

$$\vec{L}_{\Pi z} = \frac{1}{c^2} \iiint_V \left[\vec{r} \times \left\langle \vec{\Pi}_{xy} \right\rangle_{T_0} \right] dV = \frac{1}{c^2} \iiint_V \left[\vec{e}_r \times \vec{e}_\psi \right] \left\langle \Pi_{xy} \right\rangle_{T_0} r^3 dr \sin\theta \, d\theta d\varphi.$$

Подставив в последнюю формулу (27), получим:

$$\vec{L}_{\Pi z} = -\frac{\omega_{ck}}{\mu_0 c^2} \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi Y_0 \Lambda \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \left[\vec{e}_r \times \vec{e}_\psi \right] \sin\left(\psi - \varphi + \varphi_x\right) d\varphi. \qquad (36)$$

Вычисляя векторное произведение единичных направляющих векторов:

$$\left[\vec{e}_r \times \vec{e}_\psi\right] = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\left(\psi+\varphi_x\right) & \sin\left(\psi+\varphi_x\right) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\vec{e}_x\cos\theta\sin\left(\psi+\varphi_x\right) + \vec{e}_y\cos\theta\cos\left(\psi+\varphi_x\right) + \vec{e}_z\sin\theta\sin\left(\psi-\varphi+\varphi_x\right),$$

и учитывая ненулевой интеграл по азимутальной переменной φ на интервале 2π от гармонических тригонометрических функций, получим:

$$\vec{L}_{\Pi z} = -\vec{e}_z\frac{\omega_{ck}}{\mu_0 c^2}\int_0^\infty r^3 dr\int_0^\pi Y_0\Lambda\sin^2\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\psi-\varphi+\varphi_x\right)d\varphi =$$
$$= -\vec{e}_z\frac{\pi\omega_{ck}}{\mu_0 c^2}\int_0^\infty r^3 dr\int_0^\pi Y_0\Lambda\sin^2\theta\, d\theta. \qquad (37)$$

Сопоставляя (37) и (33), получим:

$$\vec{M}_{\Pi z} = \frac{c^2}{2V_э}\vec{L}_{\Pi z}. \qquad (38)$$

Подчиняя (38) гиромагнитному отношению $e/2m_e$ (e, m_e – заряд и масса покоя электрона соответственно) [6, с. 177], получим известное выражение $m_ec^2 = eV_э$, вытекающее из предположения, что полная энергия точечного покоящегося электрона обусловлена энергией его электростатического поля [2, 4]. Из этого положения следует известный классический радиус электрона $r_0 = e^2/4\pi\varepsilon_0 m_e c^2$. Поэтому $V_э$ есть электростатический потенциал $V_э(r_0)$, создаваемый точечным зарядом электрона на удалении от точечного заряда на расстоянии классического радиуса электрона.

VII. Обсуждение результатов

Эквивалентному току, определяемому из вектора Пойнтинга по (32), соответствует квантованный магнитный момент (34) кратности (m–1), который корректно дополняет однократный магнитный момент классического тока орбитального электрона до научно обоснованного в квантовой механике орбитального магнитного момента электрона кратности m (где m – магнитное квантовое число). Поэтому, согласованность полевой и зарядовой составляющих квантово-механическому результату подтверждает корректность примененного классического подхода.

В настоящее время не существует физической основы для тока (32), который создавал бы квантованный магнитный момент кратности (m–1). Однако этот ток, как и ток перемещения заряда электрона, создает магнитный момент, который является научно-обоснованной физической реальностью. Этот ток обусловлен циркуляцией постоянной составляющей потока электромагнитной мощности, причиной которого выступает вектор Пойнтинга вращающейся вокруг оси z электромагнитной полевой структуры.

Из (38) с учетом (37) и (35) следует, что вращающаяся вокруг оси z составляющая ЭМП создает квантованный момент количества движения кратности m–1 $\left(\vec{L}_{\Pi z} = -(m-1)\hbar\vec{e}_z\right)$, который также корректно дополняет однократный момент импульса орбитальной частицы (электрона), равный $-\hbar\vec{e}_z$, до наблюдаемого значения. Результирующий орбитальный момент количества движения (вдоль оси вращения – оси z) корректно согласуется с научно-обоснованным в квантовой механике значением момента импульса:

$$\vec{L}_z = \vec{L}_{\Pi z} - \hbar\vec{e}_z = -m\hbar\vec{e}_z\,, \tag{39}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка.

Требование соответствия (38) фундаментальному гиромагнитному отношению приводит к другой фундаментальной величине – к классическому радиусу электрона r_0. В [1] аналогичный результат повторялся для задачи с равномерно движущимся электроном.

Именно электростатический потенциал $V_э(r_0)$ при наличии циркулирующего потока электромагнитной мощности становится необходимым условием появления квантованного магнитного момента, который рассчитывается посредством выявленного тока.

VIII. Заключение

1. В макросистемах, предназначенных для однонаправленной передачи потока электромагнитной энергии (от источника к потребителю), не создается магнитного момента. В формуле вектора Пойнтинга для таких систем плотность тока выполняет расчетную роль.

2. В рамках классической теории разработана математическая модель плотности тока и связанного с ним магнитного момента для орбитального электрона в центрально симметричном электростатическом поле.

3. Для автономных электромагнитных микросистем с постоянной составляющей циркулирующего вектора Пойнтинга, возникает неизвестный тип тока, который является причиной квантованного магнитного момента.

4. Источником неизвестного типа тока является циркулирующий поток электромагнитной мощности при наличии электростатического потенциала (электрического заряда).

Таким образом, построена математическая модель вектора Пойнтинга вращающейся составляющей электромагнитной структуры, на основе которой построены модели плотности тока и магнитного момента. Источником магнитного момента является неизвестной физической природы ток, создаваемый циркуляцией постоянной составляющей потока электромагнитной мощности при наличии в системе электростатического потенциала.

Поступила в редакцию 13.04.2022
Received 13.04.2022

Библиографический список

[1] Меньшов Е.Н. Представление вектора Пойнтинга через электрические характеристики электротехнических систем // Интеллектуальная Электротехника. 2021. № 4 (16). С. 36-46. DOI: 10.46960/2658-6754_2021_4_36
[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Теория поля. Том 2. М.: Физматлит, 2003. – 536 с.
[3] Меньшов Е.Н. О свойствах калибровки Лоренца в теории электромагнитного поля // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей. 2020. Вып. 16. С. 97-104.
[4] Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. – 702 с.
[5] Меньшов Е.Н. Расширение возможностей классической теории электромагнитного поля // Научное обозрение. Физико-математические науки. 2020. № 1. С. 4-4. DOI: 10.17513/srpm.92
[6] Матвеев А.Н. Квантовая механика и строение атома. М.: Высшая школа, 1965. – 355 с.
[7] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978. – 320 с.
[8] Ильинский Ю.А., Келдыш Л.В. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом. М.: МГУ, 1989. – 299 с.
[9] Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967. – 780 с.

References

[1] E.N. Menshov, "Representation of the Poynting vector through electrical characteristics of electrical systems", *Smart Electrical Engineering*, vol. 16, no. 4, pp. 36-46, Dec. 2021. DOI: 10.46960/2658-6754_2021_4_36 (in Russian).
[2] L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Teoreticheskaya fizika. Teoriya polya [Theoretical Physic. Field Theory]*. Vol. 2. Moscow: Fizmatlit, 2003 (in Russian).
[3] E.N. Menshov, "O svojstvah kalibrovki Lorenca v teorii elektromagnitnogo polya [On the properties of Lorentz calibration in electromagnetic field theory]", in proc. *Sintez, analiz i diagnostika elektronnyh cepej [Synthesis, analysis and diagnostics of electronic circuits]*, is. 16, pp. 97-104, 2020 (in Russian).

[4] J. Jackson, *Klassicheskaya elektrodinamika [Classical electrodynamics]*. Moscow: Mir, 1965 (in Russian).
[5] E.N. Menshov, “Rasshirenie vozmozhnostej klassicheskoj teorii elektromagnitnogo polya [Expanding the possibilities of the classical theory of the electromagnetic field]”, *Nauchnoe obozrenie. Fiziko-matematicheskie nauki [Scientific Review. Physical and mathematical sciences]*, no. 1, pp. 4-4, 2020 (in Russian). DOI: 10.17513/srpm.92
[6] *A.N. Matveev*, *Kvantovaya mekhanika i stroenie atoma [Quantum mechanics and the structure of the atom]*. Moscow: Higher School, 1965 (in Russian).
[7] A.F. Nikiforov and V.B. Uvarov, *Special'nye funkcii matematicheskoj fiziki [Special functions of mathematical physics]*. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
[8] Yu.A. Ilyinsky and L.V. Keldysh, “*Vzaimodejstvie elektromagnitnogo izlucheniya s veshchestvom” [Interaction of electromagnetic radiation with matter]*. Moscow: MGU, 1989 (in Russian).
[9] A. Ango, *“Matematika dlya elektro- i radioinzhenerov” [Mathematics for electrical and radio engineers]*. Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ
INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Меньшов Евгений Николаевич, доктор технических наук, доцент Ульяновского государственного технического университета, г. Ульяновск, Российская Федерация.

Eugene N. Menshov, D. Sci (Eng.), associate professor of Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russian Federation.