
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ И СИСТЕМЫ

УДК 621.3.011.713

DOI 10.46960/2658-6754_2023_2_04

**АЛГОРИТМ ПОИСКА АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ
ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
МЕТОДОМ МАТРИЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ****А.С. Корнев**

ORCID: 0000-0001-6055-3350 e-mail: alex_kornev46@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
*Санкт-Петербург, Россия***Н.В. Кузнецов**

ORCID: 0000-0002-6474-9657 e-mail: nkuznetsov239@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
*Санкт-Петербург, Россия***С.И. Вольский**

ORCID: 0000-0002-4175-869X e-mail: volsky-s@yandex.ru

Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)
*Москва, Россия***И.П. Викулов**

ORCID: 0000-0002-1859-6530 e-mail: i_vikulov@mail.ru

Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I
Санкт-Петербург, Россия

Предложен аналитический способ расчета переходных процессов методом матричной экспоненты в линейных электрических цепях с начальными условиями, в состав которых входят: один источник переменного (гармонического) тока или ЭДС, управляемый ключ, резистивные и реактивные элементы, приводящие к комплексным корням. Подобные электрические цепи широко применяются в статических преобразователях электрической энергии различного назначения, которые содержат управляемые полупроводниковые приборы. Предложен алгоритм поиска аналитического решения, который базируется на составлении двух систем уравнений. Первая система организует связь матрицы первых производных переменных состояния с матрицей самих переменных состояния. Вторая система устанавливает

связь между искомой выходной величиной, переменными состояниями и источником внешнего воздействия. При составлении алгоритма использованы законы Кирхгофа, теорема Гамильтона-Келли и матричный вычислительный аппарат. Разработанный алгоритм позволяет получать искомые величины в виде тригонометрических функций с различными угловыми частотами, минуя сложные алгебраические преобразования. В качестве примера реализации предложенного алгоритма взята электрическая цепь, в которой до момента коммутации ключа через реактор протекал установившийся переменный ток. Точность полученных аналитических выражений искомых переходных функций токов и напряжений с относительным расхождением результатов не более 0,1 % была подтверждена компьютерным моделированием в *MATLAB Simulink*. Рассмотренная теоретическая разработка представляет интерес для специалистов, занятых исследованиями и расчетами переходных процессов в преобразовательных устройствах с управляемыми полупроводниковыми приборами (транзисторами или тиристорами).

Ключевые слова: комплексные корни, матричные уравнения, метод матричной экспоненты, переходные процессы, теорема Гамильтона-Келли, цепь переменного тока.

Для цитирования: Корнев А.С., Кузнецов Н.В., Вольский С.И., Викулов И.П. Алгоритм поиска аналитического решения для расчета переходных процессов методом матричной экспоненты // Интеллектуальная Электротехника. 2023. №2. С. 4-20. DOI: 10.46960/2658-6754_2023_2_04

SEARCH ALGORITHM FOR CALCULATING TRANSIENTS BY MATRIX EXPONENTIAL METHOD

A.S. Kornev

ORCID: 0000-0001-6055-3350 e-mail: alex_kornev46@mail.ru

State Marine Technical University
Saint-Petersburg, Russia

N.V. Kuznetsov

ORCID: 0000-0002-6474-9657 e-mail: nkuznetsov239@gmail.com

State Marine Technical University
Saint-Petersburg, Russia

S.I. Volskiy

ORCID: 0000-0002-4175-869X e-mail: volsky-s@yandex.ru

Moscow Aviation Institute (National Research University)
Moscow, Russia

I.P. Vikulov

ORCID: 0000-0002-1859-6530 e-mail: i_vikulov@mail.ru

Emperor Alexander I St.Petersburg State Transport University
Saint-Petersburg, Russia

Abstract. An analytical method is proposed for calculating transients by the matrix exponential method in line electrical circuits with initial conditions, which include one source of alternating (harmonic) current or electromotive force, a controlled switch, resistive and reactive elements leading to complex roots. Such electric circuits are widely used in static converter of electrical energy for various purposes, containing controlled semiconductor devices. The proposed search algorithm of the analytical solution is based on the compilation of two simultaneous equations, the first of which organizes the connection of the matrix of the first derivatives of state variables with the matrix of the state variables themselves, and the second system establishes a connection between the required output values, state variables and the source of external action. In this case, Kirchhoff's laws, Hamilton-Cayley theorem and a matrix computing equipment are used. The developed algorithm allows to obtain the required values in the form of trigonometric functions with different angular frequencies, bypassing complex algebraic transformations. As an example of the implementation of the proposed algorithm, an electric circuit is taken in which, until the moment of switching the key, the reactor had alternating current. The accuracy of the obtained analytical expressions of the required transient functions of currents and voltages was confirmed by computer modeling in MATLAB Simulink with a relative discrepancy of results no more than 0.1 %. The theoretical development considered in the article is of interest to electrical engineers who are engaged in theoretical research and calculations of transients in converter with controlled semiconductor devices (transistors or thyristors).

Keywords: AC electrical circuits, complex roots, Hamilton-Cayley theorem, matrix equations, method of matrix exponential, transient characteristics.

For citation: A.S. Kornev, N.V. Kuznetsov, S.I. Volskiy and I.P. Vikulov, «Search algorithm for calculating transients by matrix exponential method», *Smart Electrical Engineering*, no .2, pp. 4-20, 2023. DOI: 10.46960/2658-6754_2023_2_04

I. Введение

В настоящее время широко применяются статические преобразователи электрической энергии, содержащие, помимо источника ЭДС или тока, резистивных и реактивных элементов, управляемые полупроводниковые приборы – транзисторы или тиристоры [1-3]. В результате коммутации данных приборов возникают переходные процессы, которые зависят от начальных условий и параметров элементов статического преобразователя. При исследовании таких переходных процессов эффективно использовать компьютерное моделирование, с помощью которого существенно сокращается время, необходимое для определения искомых токов и напряжений элементов, входящих в состав таких устройств [4-6]. Однако для анализа взаимосвязи и влияния параметров элементов статического преобразователя на переходные процессы возникает необходимо найти аналитическое решение.

Одним из универсальных путей исследования аналитических моделей статических преобразователей является использование метода матричной экспоненты, который базируется на применении матричного вычислительного аппарата [7-9]. В основу данного метода заложены система уравнений состояния электрической цепи в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \times \mathbf{x} + \mathbf{B} \times \mathbf{u}, \quad (1)$$

и системы уравнений для выходных (искомых) переменных:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \times \mathbf{x} + \mathbf{D} \times \mathbf{u}, \quad (2)$$

где \mathbf{x} и $\dot{\mathbf{x}}$ – матрицы столбцы переменных состояния и их производные по времени; \mathbf{A} – квадратная матрица параметров электрической схемы (матрица Якоби); \mathbf{B} – матрица связи между источниками и переменным состоянием; \mathbf{u} – матрица столбец источников внешнего воздействия; \mathbf{C} – связная матрица переменных состояния с выходом электрической цепи (искомые токи и напряжения); \mathbf{D} – матрица прямой связи входа с выходом электрической цепи.

Во многих случаях при составлении системы уравнений состояния используют либо законы Кирхгофа [10-12], либо метод наложения [11, 13], либо топологический метод [10, 11, 14]. Первые два метода больше всего приемлемы при расчете переходных процессов в простых электрических цепях, содержащих не более трех реактивных элементов. При большем количестве реактивных элементов целесообразно применять топологический метод.

В любом случае аналитическое решение составленной системы уравнений состояния можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{0}) + e^{\mathbf{A}t} \cdot \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где $e^{\mathbf{A}t}$ – матричная экспонента; $\mathbf{x}(\mathbf{0})$ – начальные условия.

При этом наиболее трудным действием является определение матричной экспоненты. Для этого традиционно используют теорему Гамильтона-Келли [10, 11, 15] или метод Сильвестра [11, 15] либо операторный метод [10, 16, 17].

Обычно в литературных источниках исследуются переходные процессы в электрических цепях с нулевыми начальными условиями, аналитическое решение которых содержит вещественные корни. При этом нахождение аналитического решения переходных процессов подобных электрических цепей особых затруднений не вызывает. В данной статье объектом

расчета переходных процессов являются электрические цепи с начальными условиями, содержащие источник переменного ЭДС или тока, идеальный ключ, резистивные и два реактивных элемента, приводящие аналитическое решение к комплексным корням.

II. Предложенный алгоритм расчета переходных процессов с начальными условиями и комплексными корнями

Для рассматриваемого случая предложен алгоритм поиска аналитического решения расчета переходных процессов на базе метода матричной экспоненты с использованием законов Кирхгофа, теоремы Гамильтона-Келли с учетом двух первых членов ряда и матричного вычислительного аппарата, который позволяет получать искомые величины в виде тригонометрических функций с различными угловыми частотами, минуя сложные алгебраические преобразования.

Поиск аналитического решения расчета переходных процессов изложен ниже.

1. Выбирают переменные состояния, которыми являются токи в реакторах и напряжения на конденсаторах.
2. Составляют систему уравнений состояния посредством использования первого и второго законов Кирхгофа для электрической схемы после замыкания ключа.
3. Преобразовывают полученную систему уравнений состояния к матричной форме (1).
4. Формируют систему уравнений для выходных переменных (искомых токов, протекающих через конденсаторы и напряжений на реакторах).
5. Преобразовывают полученную систему уравнений для выходных переменных к матричной форме (2).
6. Определяют численные значения корней из характеристического уравнения:

$$\Delta(\mathbf{p}) = \det(\mathbf{p} \times \mathbf{1} - \mathbf{A}) = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная диагональная матрица; \mathbf{p} – независимая переменная.

7. Подставляют полученные численные значения корней характеристического уравнения в следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{p_2 - p_1} \cdot \begin{pmatrix} p_2 & -p_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{p_1 \cdot t} \\ e^{p_2 \cdot t} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где a_0 и a_1 – коэффициенты первых двух членов ряда при определении экспоненциальной матричной функции с использованием теоремы Гамильтона-Кели:

$$e^{A \cdot t} = a_0 \cdot \mathbf{1} + a_1 \cdot \mathbf{A}. \quad (6)$$

Следует заметить, что (5) получено из уравнения:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 1 & p_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{p_1 \cdot t} \\ e^{p_2 \cdot t} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

путем подстановки обратной матрицы:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \times \mathbf{A}^T = \frac{1}{p_2 - p_1} \cdot \begin{pmatrix} p_2 & -p_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

8. Записывают матричную экспоненциальную функцию (6) с учетом вычисленных значений в (5).
9. Подставляют полученные численные значения в интеграл второго члена (3):

$$\int_0^t e^{-A \cdot \tau} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (9)$$

10. Осуществляют интегрирование (9) с учетом того, что:

$$\int_0^t e^{p \cdot \tau} \cdot \sin(\omega \tau) d\tau = \frac{1}{p^2 + \omega^2} (p \cdot \sin(\omega \tau) - \omega \cdot \cos(\omega \tau)). \quad (10)$$

11. Подставляют численные значения экспоненциальной функции, найденной в п. 9, и интеграла, определенного в п. 11, во второй член (3):

$$e^{A \cdot t} \cdot \int_0^t e^{-A \cdot \tau} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (11)$$

12. Записывают начальные условия $\mathbf{x}(0)$ при $t = 0$.
13. Подставляют численные значения экспоненциальной функции, полученной в п. 9, и начальных условий в первый член (3):

$$e^{At} \cdot \mathbf{x}(0). \quad (12)$$

14. Получают окончательное решение переменных состояния, подставив численные значения (12) и (11) в (3).
15. Находят выходные (искомые) переменные, подставив в систему уравнений п. 5 численные значения переменных состояния, полученных в п. 15.
16. Определяют остальные требуемые значения токов и напряжений с использованием законов Кирхгофа и полученных численных значений переменных состояния и выходных переменных.

III. Пример определения аналитического решения расчета переходных процессов в электрической цепи

В качестве примера реализации предложенного алгоритма поиска аналитического решения расчета переходных процессов взята электрическая цепь (рис. 1), в которой до момента коммутации ключа K через реактор L протекал установившийся переменный ток. С подобными топологиями зачастую приходится сталкиваться при исследовании выходных характеристик статических емкостных накопителей электрической энергии, имеющих сходную конфигурацию элементов.

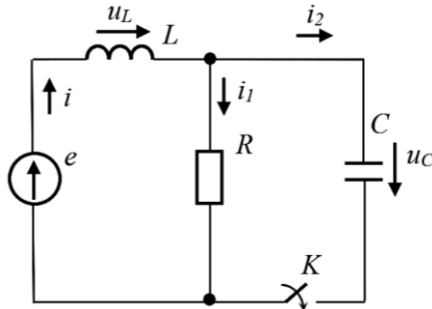


Рис. 1. Пример электрической цепи

Fig. 1. Example of an electrical circuit

Для данной электрической схемы были выбраны параметры элементов, приводящие в совокупности к комплексным корням, а именно:

$$e = 80 \sin(\omega t), \text{ В}; \quad \omega = 300, \text{ с}^{-1}; \quad L = 0,25, \text{ Гн}; \quad R = 1, \text{ кОм}; \quad C = 30, \text{ мкФ}.$$

Предложенный алгоритм поиска аналитического решения искомых переменных переходного процесса для рассматриваемой электрической цепи реализуется следующим образом.

Вначале записывается система уравнений состояния согласно первому и второму законам Кирхгофа после замыкания ключа K :

$$\begin{cases} u_L + R \cdot i_1 = e; \\ -R \cdot i_1 + u_C = 0; \\ -i + i_1 + i_2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Затем из (13) определяются производные $\frac{di}{dt}$ и $\frac{du_C}{dt}$.

Поскольку:

$$i_2 = C \cdot \frac{du_C}{dt}, \quad (14)$$

то после подстановки (14) в третье уравнение системы (13) следует, что:

$$i_1 = i - C \cdot \frac{du_C}{dt}, \quad (15)$$

Подставив (15) во второе уравнение системы (13):

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot u_C + \frac{1}{C} \cdot i. \quad (16)$$

Из второго уравнения системы (13) следует:

$$i_1 = \frac{u_C}{R}. \quad (17)$$

Поскольку:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}, \quad (18)$$

после подстановки (17) и (18) в первое уравнение системы (13):

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} \cdot u_C + \frac{1}{L} \cdot e. \quad (19)$$

В результате система уравнений состояния (1) в матричной форме принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_c \\ u_c \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R \cdot C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_c \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \cdot (e), \quad (20)$$

где после подстановки численных значений:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -33,3 & 33,3 \cdot 10^3 \\ -4,0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad (e) = (80 \cdot \sin(300 \cdot t)).$$

Из второго уравнения системы (13) определяются:

$$u_c = R \cdot i_1; \quad (21)$$

$$i_1 = \frac{u_c}{R}. \quad (22)$$

Подставив (21) в первое уравнение системы (13) и (22) в третье уравнение системы (13), получим выражения для расчета выходных (искомых) переменных:

$$u_L = -u_c + e; \quad (23)$$

$$i_2 = -\frac{1}{R} \cdot u_c + i. \quad (24)$$

В результате система (2) для выходных (искомых) переменных в матричной форме принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} u_L \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_c \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (e), \quad (25)$$

где после подстановки численных значений:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10^{-3} & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Затем, подставив в (4) численные значения:

$$\Delta(\mathbf{p}) = \det \left\{ \begin{pmatrix} p + 33,3 & -33,3 \cdot 10^3 \\ 4,0 & p \end{pmatrix} \right\} = 0. \quad (26)$$

Из (26) следует:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+33,3 & -33,3 \cdot 10^3 \\ 4,0 & p \end{vmatrix} = p^2 + 33,3 \cdot p + 13,3 \cdot 10^4 = 0. \quad (27)$$

В результате определены корни характеристического уравнения:

$$p_1 = -16,7 + j \cdot 365; \quad (28)$$

$$p_2 = -16,7 - j \cdot 365. \quad (29)$$

После подстановки численных значений (28) и (29) в (5) получаем следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \cdot e^{p_1 t} + M_2 \cdot e^{p_2 t} \\ -j \cdot 13,7 \cdot 10^{-4} e^{p_1 t} + -j \cdot 13,7 \cdot 10^{-4} e^{p_2 t} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где $M_1 = 0,5 - j \cdot 22,9 \cdot 10^{-3}$; $M_2 = 0,5 + j \cdot 22,9 \cdot 10^{-3}$.

В результате, с учетом (30), из (6) определяется матричная экспоненциальная функция:

$$e^{A \cdot t} = \begin{pmatrix} M_2 \cdot e^{p_1 t} + M_1 \cdot e^{p_2 t} & -j \cdot 45,7 \cdot (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \\ -j \cdot 54,8 \cdot 10^{-4} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) & M_1 \cdot e^{p_1 t} + M_2 \cdot e^{p_2 t} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Подставив (31) в интегральный член (9) уравнения (3):

$$\int_0^t e^{-A \cdot t} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{u}(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} -j \cdot 14,6 \cdot 10^3 \cdot \int_0^t F_1 d\tau + j \cdot 14,6 \cdot 10^3 \cdot \int_0^t F_2 d\tau \\ (160 - j \cdot 7,31) \cdot 10^3 \cdot \int_0^t F_1 d\tau + (160 + j \cdot 7,31) \cdot \int_0^t F_2 d\tau \end{pmatrix}. \quad (32)$$

где $\omega_1 = 300$; $F_1 = e^{-p_1 \tau} \cdot \sin(\omega_1 \cdot \tau)$; $F_2 = e^{-p_2 \tau} \cdot \sin(\omega_1 \cdot \tau)$.

Затем необходимо интегрировать (32) с учетом (10):

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-A \cdot t} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{u}(\tau) d\tau = \\ & = \begin{pmatrix} K_{11} - K_{12} \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot e^{-p_1 t} + K_{13} + K_{14} \cos(\omega_1 t) \cdot e^{-p_2 t} + 53,9 \\ K_{21} + K_{22} \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot e^{-p_1 t} + K_{23} + K_{24} \cos(\omega_1 t) \cdot e^{-p_2 t} - 2,05 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (33)$$

где дополнительные вспомогательные переменные:

$$\begin{aligned} K_{11} &= (117 - j \cdot 27,5) \cdot F_1; & K_{12} &= 27 - j \cdot 94,8; & K_{13} &= (117 + j \cdot 27,5) \cdot F_2; \\ K_{14} &= -27 + j \cdot 94,8; & K_{21} &= (0,36 + j \cdot 1,26) \cdot F_1; & K_{22} &= 1,02 - j \cdot 0,34; \\ K_{23} &= (0,36 - j \cdot 1,26) \cdot F_2; & K_{24} &= 1,02 + j \cdot 0,34. \end{aligned}$$

Перемножая (31) на (33), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} e^{A \cdot t} \cdot \int_0^t e^{-A \cdot \tau} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{u}(\tau) d\tau = \\ = \begin{pmatrix} 23,4 \cdot \sin(\omega_1 t) - 53,9 \cdot \cos(\omega_1 t) - (190 \cdot \sin(\omega_2 t) - 53,9 \cdot \cos(\omega_2 t)) \cdot e^{-16,7t} \\ 0,72 \cdot \sin(\omega_1 t) + 2,05 \cdot \cos(\omega_1 t) - (0,685 \cdot \sin(\omega_2 t) + 2,05 \cdot \cos(\omega_2 t)) \cdot e^{-16,7t} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

где $\omega_2 = 365$.

Следует отметить, что начальные условия (при $t = 0$) имеют следующий вид:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 79,8 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(-4,28^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -59,5 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Следовательно, с учетом (31) и (35), определяется первый член (3):

$$\begin{aligned} e^{A \cdot t} \cdot \mathbf{x}(0) = \\ = \begin{pmatrix} -0,544 \cdot \sin(\omega_2 t) \cdot e^{-16,7t} \\ -59,5 \cdot 10^{-4} \cos(\omega_2 t) \cdot e^{-16,7t} - 27,2 \cdot 10^{-5} \sin(\omega_2 t) \cdot e^{-16,7t} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставив (36) и (34) в (3), получим аналитическое решение переменных состояния:

$$\begin{aligned} u_c(t) &= 234 \cdot \sin(\omega_1 t) - 53,9 \cdot \cos(\omega_1 t) - (190 \cdot \sin(\omega_2 t) - \\ &\quad - 53,9 \cdot \cos(\omega_2 t)) \cdot e^{-16,7t}; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} i(t) &= 0,719 \cdot \sin(\omega_1 t) + 2,05 \cdot \cos(\omega_1 t) - (0,685 \cdot \sin(\omega_2 t) + \\ &\quad + 2,05 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(\omega_2 t)) \cdot e^{-16,7t}. \end{aligned} \quad (38)$$

Затем, с учетом (37) и (38), из (25) определены выходные (искомые) переменные. После преобразований:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= -154 \cdot \sin(\omega_1 t) + 53,9 \cdot \cos(\omega_1 t) + (190 \cdot \sin(\omega_2 t) - \\ &\quad - 53,9 \cdot \cos(\omega_2 t)) \cdot e^{-16,7t}; \end{aligned} \quad (39)$$

$$i_2(t) = 0,485 \cdot \sin(\omega_1 t) + 2,1 \cdot \cos(\omega_1 t) - (0,495 \cdot \sin(\omega_2 t) + 2,11 \cdot \cos(\omega_2 t)) \cdot e^{-16,7t}. \quad (40)$$

На завершающем этапе расчета определен ток i_1 из третьего уравнения системы (13):

$$i_1(t) = 0,234 \cdot \sin(\omega_1 t) - 0,054 \cdot \cos(\omega_1 t) - (0,19 \cdot \sin(\omega_2 t) + 0,054 \cdot \cos(\omega_2 t)) \cdot e^{-16,7t}. \quad (41)$$

Таким образом, с помощью предложенного алгоритма выведены выражения (37)–(41), которые являются аналитическим решением расчета переходных процессов электрической схемы, приведенной на рис. 1. Данные выражения позволяют в зависимости от времени вычислить необходимые токи и напряжения в рассматриваемой цепи, с помощью которых можно проводить исследования переходных процессов после коммутации ключа K .

III. Результаты проверки полученного аналитического решения расчета переходных процессов

Компьютерное моделирование – современное универсальное средство проверки полученных результатов. Для этих целей широко используют интерактивный объектно-ориентированный интерфейс в среде моделирования *Simulink* пакета *MATLAB* [4, 5]. Совместное применение блок-моделей библиотек *SimPowerSystems Specialized Technology* [5, 6] и *Simulink* при использовании функций самого пакета *MATLAB* дает почти неограниченные возможности для компьютерного моделирования любых электротехнических средств, включая статические преобразователи.

На первом этапе был выполнен расчет переходных характеристик напряжений и токов рассматриваемой электрической цепи посредством использования (37)–(41). В качестве примера на рис. 2 и 3 представлены результаты таких расчетов. Затем для проверки расчетных результатов была разработана имитационная компьютерная модель рассматриваемой электрической цепи с использованием *SimPowerSystems* и *Simulink*, с помощью которой были определены аналогичные переходные характеристики напряжений и токов.

Проведенный сопоставительный анализ переходных характеристик, рассчитанных по предложенному алгоритму и полученных с помощью разработанной имитационной компьютерной модели, показывает их полное совпадение, как по амплитудным параметрам, так и по их длительности с относительной погрешностью, которая не превышает 0,1 %.

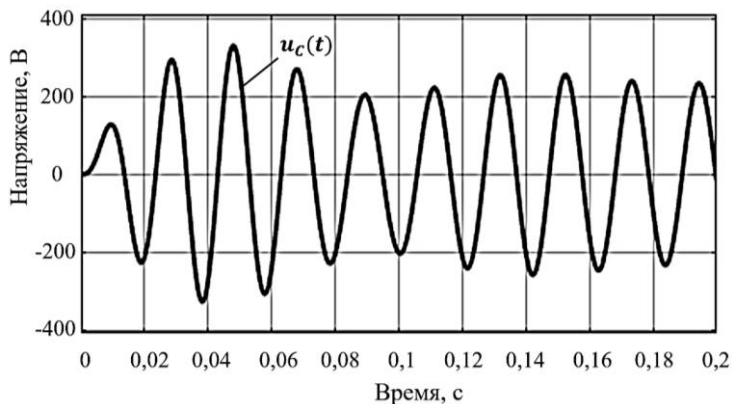


Рис. 2. Вычисленные значения напряжения

Fig. 2. Calculated values of voltage

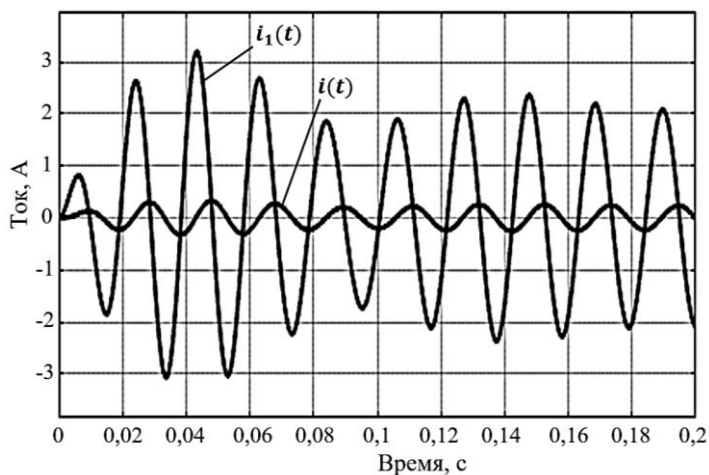


Рис. 3. Вычисленные значения токов

Fig. 3. Calculated values of currents

Таким образом, проведенное компьютерное моделирование подтвердило правильность разработанного алгоритма, посредством которого были получены расчетные выражения переменных состояния и выходных (искомых) переменных.

IV. Заключение

Предложенный алгоритм поиска аналитического решения для расчета переходных процессов на базе метода матричной экспоненты с использованием законов Кирхгофа, теоремы Гамильтона-Келли и матричного вычислительного аппарата позволяет с высокой достоверностью проводить количественные и качественные исследования линейных электрических цепей. Сопоставительный анализ переходных характеристик, рассчитанных по предложенному алгоритму и полученных с помощью разработанной имитационной компьютерной модели, показывает их полное совпадение, как по амплитудным параметрам, так и по их длительности с относительной погрешностью, которая не превышает 0,1 %.

Представленный материал может быть полезен для специалистов и инженерных работников, занимающихся исследованиями и расчетами переходных процессов в электротехнических устройствах переменного тока, включая статические преобразователи с управляемыми полупроводниковыми приборами.

© Корнев А.С., 2023

© Кузнецов Н.В., 2023

© Вольский С.И., 2023

© Викулов И.П., 2023

Поступила в редакцию 13.05.2023

Принята к публикации 31.05.2023

Received 13.05.2023

Accepted 31.05.2023

Библиографический список

- [1] Зиновьев Г.С. Силовая электроника. М.: Юрайт, 2018. – 667 с.
- [2] Makarov S.N., Ludwig R., Bitar S.J. Practical Electrical Engineering. Washington: Worcester Polytechnic Institute, 2016. – 664 p. DOI: 10.1007/978-3-319-21173-2
- [3] Skorokhod Yu., Philin D., Volskiy S. Analysis of high-voltage converters with serial connection units and with input current correction // proc. 2020 21st International Scientific Conference on Electric Power Engineering (EPE), Oct. 19-21, 2020, Prague, Czech Republic: IEEE, 2020. P. 133-137. DOI: 10.1109/EPE51172.2020.9269238
- [4] Терехин В.Б., Дементьев Ю.Н. Компьютерное моделирование систем электропривода постоянного и переменного тока в Simulink. М.: Юрайт, 2022. – 306 с.
- [5] Черных И.В. Моделирование электротехнических устройств в MATLAB, SimPowerSystems и Simulink. М.: ДМК Пресс, 2008. – 288 с.
- [6] Джандубаев А.-З. Р., Алиев И.И. MATLAB, Simulink и SimPowerSystems в электроэнергетике. Черкесск: БИЦ СевКавГГА, 2014. – 137 с.
- [7] Доманова Е.Д. Матричная экспонента. Теория и практика. Новосибирск: НГУ, 2020. – 237 с.
- [8] Мартынов В.А., Голубев А.Н. Матричные методы анализа электрических и магнитных цепей. Иваново: ИГЭУ, 2017. – 148 с.

- [9] Овсянников А.Я. Дополнительные главы теории матриц. Екатеринбург: УрФУ, 2020. – 107 с.
- [10] Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Юрайт, 2023. – 831 с.
- [11] Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., В.Л. Чечурин. Теоретические основы электротехники. СПб.: Питер, 2003. – 463 с.
- [12] Ким К.К., Корнев А.С., Ткачук А.А., Шпилев М. А. Руководство к решению задач по основам теории электрических цепей. С.-Пб.: ПГУПС, 2015. – 68 с.
- [13] Матвиенко В.А. Основы теории цепей. Екатеринбург: УрФУ, 2016. – 162 с.
- [14] Осипов Ю.М., Борисов П.А. Методы расчета линейных электрических цепей. СПб.: ИТМО, 2012. – 120 с.
- [15] Денисова А.В. Применение операторного метода и метода переменных состояния для расчета переходных процессов. Методические указания. СПб.: ИТМО, 2012. – 105 с.
- [16] Доброжанова Н.И., Раимова А.Т. Расчет переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами. Оренбург: ОГУ, 2014. – 43 с.
- [17] Батюков С.В., Иваницкая Н.А., Шилин Л.Ю. Теория электрических цепей. Минск: БГУИР, 2012. – 116 с.

References

- [1] G.S. Zinoviev, *Silovaya elektronika [Power Electronics]*. Moscow: Yurayt, 2018 (in Russian).
- [2] S.N. Makarov, R. Ludwig and S.J. Bitar, *Practical Electrical Engineering*. Washington: Worcester Polytechnic Institute, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-21173-2
- [3] Yu. Skorokhod, D. Philin and S.Volskiy, “Analysis of high-voltage converters with serial connection units and with input current correction”, in proc. *2020 21st International Scientific Conference on Electric Power Engineering (EPE)*, Oct. 19-21, 2020, Prague, Czech Republic, pp. 133-137. DOI: 10.1109/EPE51172.2020.9269238
- [4] V.B. Terekhin and Yu.N. Dementiev, *Komp'yuternoe modelirovanie sistem elektroprivoda postoyannogo i peremennogo toka v Simulink [Computer simulation of prospective and prospective current electric drive systems in Simulink]*. Moscow: Yurayt, 2022 (in Russian).
- [5] I.V. Chernykh, *Modelirovanie elektrotekhnicheskikh ustrojstv v MATLAB, SimPowerSystems i Simulink [Modeling electrical devices in MATLAB, SimPowerSystems and Simulink]*. Moscow: DMK Press, 2008 (in Russian).
- [6] A.-Z.R. Dzhendubaev and I.I. Aliev, *MATLAB, Simulink i SimPowerSystems v elektroenergetike [MATLAB, Simulink and SimPowerSystems in the electric power industry]*. Cherkessk: BIC SevKavGGTA, 2014 (in Russian).
- [7] E.D. Domanova, *Matrichnaya eksponenta. Teoriya i praktika [Matrix exponent. Theory and practice]*. Novosibirsk: NSU, 2020 (in Russian).
- [8] V.A. Martynov and A.N. Golubev, *Matrichnye metody analiza elektricheskikh i magnitnyh cepej [Matrix methods for the analysis of electrical and magnetic circuits]*. Ivanovo: ISPU, 2017 (in Russian).
- [9] A.Ya. Ovsyannikov, *Dopolnitel'nye glavy teorii matric [Additional chapters of matrix theory]*. Yekaterinburg: UrFU, 2020 (in Russian).

-
- [10] L.A. Bessonov, *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki. Elektricheskie cepej [Theoretical foundations of electrical engineering. Electrical circuits]*. Moscow: Yurayt, 2023 (in Russian).
- [11] K.S. Demirchyan, L.R. Neiman, N.V. Korovkin and V.L. Chechurin, *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki [Theoretical foundations of electrical engineering]*. St. Petersburg: Peter, 2003 (in Russian).
- [12] K.K. Kim, A.S. Kornev, A.A. Tkachuk and M.A. Shpilev, *Rukovodstvo k resheniyu zadach po osnovam teorii elektricheskikh cepej [Guidelines for solving problems on the basics of the theory of electrical circuits]*. St. Petersburg: PGUPS, 2015 (in Russian).
- [13] V.A. Matvienko, *Osnovy teorii cepej [Fundamentals of the theory of circuits]*. Yekaterinburg: UrFU, 2016 (in Russian).
- [14] Yu.M. Osipov and P.A. Borisov, *Metody rascheta linejnykh elektricheskikh cepej [Methods for calculating linear electrical circuits]*. St. Petersburg: ITMO, 2012 (in Russian).
- [15] A.V. Denisova, *Primenenie operatornogo metoda i metoda peremennykh sostoyaniya dlya rascheta perekhodnykh processov. Metodicheskie ukazaniya [Application of the operator method and the method of state variables for the calculation of transient processes. Methodical instructions]*. St. Petersburg: ITMO, 2012 (in Russian).
- [16] N.I. Dobrozhanova and A.T. Raimova, *Raschet perekhodnykh processov v elektricheskikh cepeyah s sosredotochennymi parametrami [Calculation of transient processes in electrical circuits with lumped parameters]*. Orenburg: OGU, 2014 (in Russian).
- [17] S.V. Batyukov, N.A. Ivanitskaya and L.Yu. Shilin, *Teoriya elektricheskikh cepej [Theory of electrical circuits]*. Minsk: BSUIR, 2012 (in Russian).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Корнев Александр Сергеевич,
доктор технических наук, профессор
Санкт-Петербургского государственного
морского технического университета,
г. Санкт-Петербург, Российская
Федерация

Alexander S. Kornev, Dr. Sci. (Eng.),
professor of the State Marine Technical
University, Saint-Petersburg, Russian
Federation

Кузнецов Николай Владимирович,
член-корреспондент РАН, доктор
физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
Санкт-Петербургского государственного
морского технического университета,
г. Санкт-Петербург, Российская
Федерация

Nikolay V. Kuznetsov, Corresponding
member of RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
professor, head of the department of
the State Marine Technical University,
Saint-Petersburg, Russian Federation

Вольский Сергей Иосифович,
доктор технических наук, профессор
Московского авиационного института
(Национальный исследовательский
университет), г. Москва, Российская
Федерация

Sergey I. Volskiy, Dr. Sci. (Eng.),
professor of the Moscow Aviation
Institute (National Research
University), Moscow, Russian
Federation

Викулов Илья Павлович,
кандидат технических наук, доцент
Петербургского государственного
университета путей сообщения
Императора Александра I, г. Санкт-
Петербург, Российская Федерация

Илья P. Vikulov, Cand. Sci. (Eng.),
associate professor of the Emperor
Alexander I St. Petersburg State
Transport University, Saint-Petersburg,
Russian Federation