УДК 621.3:537.8 *EDN* ***DEENJP***

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА ЧЕРЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ЧАСТЬ 3. ВИХРЕВАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА

Е.Н. Меньшов
ORCID: **0000-0003-2668-9603** e-mail: **raynd2@rambler.ru**
Ульяновский государственный технический университет
Ульяновск, Россия

Вихревая составляющая вектора Пойнтинга волновой электромагнитной структуры является источником момента импульса, тогда как связанная с законом сохранения электромагнитной энергии потенциальная составляющая вектора Пойнтинга не создает момента импульса. Разработана математическая модель волновой электромагнитной структуры, описывающая энергетические характеристики и дискретные моменты импульса.

Ключевые слова: вектор Пойнтинга, вихревая и потенциальная составляющие, квант энергии, момент импульса, электромагнитная волна.

Для цитирования: Меньшов Е.Н. Представление вектора Пойнтинга через электрические характеристики электротехнических систем. Часть 3. Вихревая составляющая вектора Пойнтинга // Интеллектуальная Электротехника. 2025. № 1. С. 105-119. EDN DEENJP

REPRESENTATION OF THE POYNTING VECTOR VIA ELECTRICAL CHARACTERISTICS OF ELECTRICAL SYSTEMS. PART 3. THE VORTEX COMPONENT OF THE POYNTING VECTOR

E.N. Menshov
ORCID: **0000-0003-2668-9603** e-mail: **raynd2@rambler.ru**
Ulyanovsk State Technical University
Ulyanovsk, Russia

Abstract. The vortex component of the Poynting vector of the wave electromagnetic structure is the source of the angular momentum, whereas the potential component of the Poynting vector associated with the law of conservation of electromagnetic energy does not create a moment of momentum. A mathematical model of the wave electromagnetic structure describing the energy characteristics and quantized moments of momentum has been developed.

Keywords: electromagnetic wave, energy quantum, moment of momentum, Poynting vector, vortex component and potential component.

For citation: E.N. Menshov, “Representation of the Poynting vector via electrical characteristics of electrical systems. Part 3. The vortex component of the Poynting vector”, *Smart Electrical Engineering*, no. 1, pp. 105-119, 2025. EDN DEENJP

I. Введение

В классической электродинамике момент импульса электромагнитного поля описывается интегралом по объему V:

$$\vec{L} = \int_V \vec{l} dV, \tag{1}$$

от объемной плотности момента импульса $\vec{l} = c^{-2}\left[\vec{r} \times \left(\vec{E} \times \vec{H}\right)\right]$, где вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = \left(\vec{E} \times \vec{H}\right)$ характеризует плотность потока электромагнитной мощности через нормальную поверхность.

Существуют различные способы описания моментов количества движения волновых структур электромагнитных процессов (ЭМП). В [1] для светового луча момент импульса, полученный в рамках параксиального приближения уравнения движения, представляется в виде двух составляющих – спинового момента импульса, обусловленного круговой поляризацией света, и орбитального момента импульса, обусловленного пространственным распределением амплитуды света. В [2] для произвольного волнового электромагнитного сгустка на основе тензорного представления векторного произведения компонентов поля описывается момент импульса в виде суммы спинового и орбитального пространственных интегралов. В качестве критерия спинового интеграла выступает отсутствие в интеграле координатного вектора, создающего трансляционные изменения подынтегральной функции. В работе показано, что плоская электромагнитная волна с произвольной поляризацией не имеет углового момента импульса.

Современные математические модели угловых моментов импульса волновых полевых структур базируются на четырехмерном тензорном анализе. Так, в [3-4] на основе корректного анализа при помощи фундаментальных законов сохранения локальных полевых характеристик подтвердилось положение, что разбиение момента импульса светового луча на спиновый и орбитальный вклады имеет физический смысл. В [5] продолжены исследования проблемы разбиения полного момента импульса на уровне интегральных характеристик. При этом математические модели угловых моментов световых электромагнитных структур выражались через первичные характеристики поля и их потенциалы. В работах не рассматривалась возможность представления вектора Пойнтинга в виде суммы составляющих – вихревой и потенциальной.

О. Хэвисайд сделал замечание о неполноте участия вектора Пойнтинга в законе сохранения энергии: «Если у вектора есть вихревая часть, она не дает вклад в закон сохранения энергии, потому что дивергенция вихревой части равна нулю. Поэтому физический смысл потока энергии имеет вектор Пойнтинга за вычетом его вихревой части» [6].

Это утверждение основано на теореме разложения Гельмгольца [7]. Дифференцируемое векторное поле можно представить суммой двух компонент – потенциальной $\vec{\Pi}_{\eta}$ и вихревой $\vec{\Pi}_{C}$:

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_{\eta} + \vec{\Pi}_{C}. \qquad (2)$$

В данной работе в рамках классической тории ЭМП исследуется связь потенциальной и вихревой составляющих вектора Пойнтинга с моментами импульса волновых электромагнитных полевых структур.

II. Физический смысл вихревой составляющей вектора Пойнтинга

Пусть полевые характеристики волновой электромагнитной структуры, ограниченные радиальным размером $r_{\text{гр}}$, удовлетворяют решению однородного волнового уравнения и описываются функцией с разделенными переменными. В этом случае пределы интегрирования по каждой независимой переменной становятся независимыми друг от друга, и $\vec{\Pi} = 0$ при $r \geq r_{\text{гр}}$, где $0 \leq r_{\text{гр}} \leq \infty$.

На основе теоремы разложения Гельмгольца (2) выражаем каждую составляющую $\vec{\Pi}$ через соответствующие потенциальные характеристики:

$$\vec{\Pi}_{C} = \operatorname{rot}\vec{C};\ \operatorname{div}\vec{\Pi}_{C} = 0 \text{ и } \vec{\Pi}_{\eta} = -\operatorname{grad}\eta;\ \operatorname{rot}\vec{\Pi}_{\eta} = 0.$$

Здесь $\vec{C}$ и η – векторная и скалярная потенциальные функции вектора Пойнтинга соответственно. Принимается условие $\nabla\vec{C} = 0$, поэтому вектор $\vec{C}$ выражается интегралом от ротора вектора $\vec{\Pi}$ [7]:

$$\vec{C}(r)=\frac{1}{4\pi}\left[\int_{V'}\frac{\vec{e}_x\,\mathrm{rot}_x\,\vec{\Pi}'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'+\int_{V'}\frac{\vec{e}_y\,\mathrm{rot}_y\,\vec{\Pi}'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'+\int_{V'}\frac{\vec{e}_z\,\mathrm{rot}_z\,\vec{\Pi}'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'\right];$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|=\sqrt{D-F\cos(\varphi-\varphi')};\ D=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta\cos\theta';\qquad(3)$$

$$F=2rr\sin\theta\sin\theta'.$$

Вычисленный *в приложении* момент импульса примет вид:

$$\vec{L}_C=\frac{1}{c^2}\int_V(\vec{r}\times\mathrm{rot}\,\vec{C})dV=\frac{1}{c^2}\int_V r(\nabla C_r-\frac{\partial\vec{C}}{\partial r})dV=\frac{2}{c^2}\int_V\vec{C}dV,\qquad(4)$$

Сопоставляя (1) и (4), получим формулу:

$$\vec{l}_C=\frac{1}{c^2}(\vec{r}\times\vec{\Pi}_C)=\frac{1}{c^2}(\vec{r}\times\mathrm{rot}\,\vec{C})=\frac{2}{c^2}\vec{C},$$

из которой следует нулевое граничное условие для $\vec{C}$:

$$\vec{C}(r_{\text{гр}})=0\ \text{ при }\ \vec{\Pi}(r_{\text{гр}})=0.$$

Утверждение 1. Плотность момента импульса волновых электромагнитных структур прямо пропорциональна векторному потенциалу вихревой составляющей вектора Пойнтинга.

Представим плотность момента импульса, обусловленной потенциальной составляющей вектора Пойнтинга, следующим образом:

$$l_\eta=\frac{1}{c^2}(\vec{r}\times\vec{\Pi}_\eta)=-\frac{1}{c^2}(\vec{r}\times\nabla\eta)=-\frac{1}{c^2}(\vec{r}\times\nabla)\eta=-\frac{1}{c^2}\hat{l}\eta;\qquad(5)$$

$$\hat{l}=\vec{e}_x(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y})+\vec{e}_y(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z})+\vec{e}_z(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}),$$

где $\hat{l}$ – дифференциальный векторный оператор, используемый в квантовой теории для описания момента импульса. Раскрыв следующее векторное выражение в сферических координатах [7]:

$$(\vec{r}\times\nabla\eta)=\frac{\partial\eta}{\partial\theta}(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}(\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi)=\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\vec{e}_\varphi-\frac{\vec{e}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\eta}{\partial\varphi},$$

получим формулу для расчета момента импульса, обусловленного $\vec{\Pi}_\eta$:

$$\vec{L}_\eta = -\frac{1}{c^2}\int_V \left(\vec{r}\times\nabla\eta\right)dV = \frac{1}{c^2}\int_0^{r_{\text{гр}}} r^2 dr\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\left(\frac{\vec{e}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}-\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\vec{e}_\varphi\right)d\varphi.$$

Переходим к декартовому базису и интегрируем по частям следующий интеграл:

$$\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\left\{\left[\left(\vec{e}_x\cos\varphi+\vec{e}_y\sin\varphi\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\vec{e}_z\right]\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}+\left(\vec{e}_x\sin\varphi-\vec{e}_y\cos\varphi\right)\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right\}d\varphi =$$

$$=\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}\left(\vec{e}_x\cos\varphi+\vec{e}_y\sin\varphi\right)d\eta+\int_0^{2\pi}\left(\vec{e}_x\sin\varphi-\vec{e}_y\cos\varphi\right)d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\eta -$$

$$-\vec{e}_z\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\eta=\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta\Big[\left(\vec{e}_x\cos\varphi+\vec{e}_y\sin\varphi\right)\cdot\eta\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(\vec{e}_x\sin\varphi-\vec{e}_y\cos\varphi\right)d\varphi\Bigg]+\int_0^{2\pi}\left(\vec{e}_x\sin\varphi-\vec{e}_y\cos\varphi\right)d\varphi\left[\eta\cdot\sin\theta\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\eta\cos\theta d\theta\right]-$$

$$-\vec{e}_z\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left[\eta(2\pi)-\eta(0)\right]=\vec{e}_x\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta\left[\eta(2\pi)-\eta(0)\right]-$$

$$-\vec{e}_z\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left[\eta(2\pi)-\eta(0)\right]=0.$$

Функции $\eta(r,\theta,\varphi)$ выражается следующей формулой [7]:

$$\eta(\vec{r})=\int_{V'}\frac{\mathrm{div}'\vec{\Pi}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dV',$$

поэтому с учетом (3) разность [$\eta(\varphi = 2\pi) - \eta(\varphi = 0)$] = 0.

В итоге момент импульса от потенциальной составляющей вектора Пойнтинга равен нулю:

$$\vec{L}_\eta = 0. \qquad (6)$$

Утверждение 2. Момент импульса волновых электромагнитных структур, описываемых функцией с разделенными переменными, создается только вихревой составляющей вектора Пойнтинга.

Плотность момента импульса в (4) не содержит координатного вектора, поэтому по критерию из [2] вихревая составляющая вектора Пойнтинга реализует спиновый момент импульса.

Связанная с законом сохранения энергии потенциальная составляющая вектора Пойнтинга не создает момента импульса для волновой электромагнитной структуры, описываемой функцией с разделенными переменными. Если последнее условие не выполняется, то равенство (6) тоже не выполняется. В этом случае составляющая $\vec{\Pi}_\eta$ может создавать только орбитальный момент импульса, так как плотность момента импульса (5) содержит явные координатные зависимости.

Из *утверждений 1* и *2* следует методический прием: можно определять физически адекватные моменты импульса волновых электромагнитных структур без использования закона сохранения энергии.

В [8] раскрыта волновая электромагнитная полевая структура

$$\langle A_{xy} \rangle_{T_0} = Y\left(\vec{e}_x \cos\psi + \vec{e}_y \sin\psi\right), \quad Y(r_{\text{гр}}) = 0 \text{ при } r_{\text{гр}} = \infty,$$

которая обуславливает (m–1)-кратные моменты импульса, корректно дополняющие однократный классический момент импульса орбитального электрона до научно обоснованных в квантовой механике орбитальных моментов количества движения электронных оболочек атома, которые кратны азимутальному квантовому числу m. Однако для этой модели энергетические характеристики не определялись.

Здесь: $\langle A_{xy} \rangle_{T_0}$ – усредненная за период T_0 вращения орбитального электрона составляющая векторного потенциала; $Y = C_0 R(r) P(\theta)$ – произведение радиальной $R(r)$ и сферической $P(\theta)$ функций; C_0 – постоянная интегрирования; $\psi = m\varphi + \omega_{cn} t + \varphi_x$ – фазовая функция, зависящая от азимутальной переменной φ и от времени t. В этой математической модели отсутствовала составляющая A_z.

Для полноты описания электромагнитной системы в целом в настоящей работе одновременно с моментом количества движения будет решаться задача определения энергетических характеристик.

III. Математическое моделирование момента количества движения замкнутой волновой структуры

Для корректного описания энергетических характеристик рассматриваемой электромагнитной структуры восстановим составляющую A_z, которую определим из кулоновской калибровки:

$$div\langle A_{xy}\rangle_{T_0} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0. \qquad (7)$$

В результате векторный потенциал примет следующий вид:

$$\vec{A} = Y\left(\vec{e}_x \cos\psi + \vec{e}_y \sin\psi\right) + A_z\vec{e}_z, \qquad (8)$$

Вычисляем дивергенцию $\langle A_{xy}\rangle_{T_0}$:

$$div\langle A_{xy}\rangle_{T_0} = C_0\Lambda\cos(\psi-\varphi);$$
$$\Lambda = P\frac{\partial R}{\partial r}\sin\theta + R\frac{\partial P}{r\partial\theta} + \frac{mRP}{\sin\theta}. \qquad (9)$$

На основе (7) и (9), и вследствие независимости азимутальной переменной φ от переменной *z*, структура неизвестной функции A_z должна иметь следующий вид:

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = -C_0\Lambda\cos(\psi-\varphi); \qquad A_z = A_{mz}\cos(\psi-\varphi). \qquad (10)$$

Далее выразим составляющие в сферической системе координат [8]:

$$A_r = (Y\sin\theta + A_{mz}\cos\theta)\cos(\psi-\varphi) = A_{mr}\cos(\psi-\varphi); \qquad (11)$$
$$A_\theta = (Y\cos\theta - A_{mz}\sin\theta)\cos(\psi-\varphi) = A_{m\theta}\cos(\psi-\varphi); \qquad (12)$$
$$A_\varphi = Y(-\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi) = Y\sin(\psi-\varphi). \qquad (13)$$

Вихревые составляющие электрического поля на основе (9) и (10) в декартовых и сферических координатах соответственно примут вид:

$$\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t = \omega_{cn}Y(\vec{e}_x\sin\psi - \vec{e}_y\cos\psi) + \vec{e}_z\omega_{cn}A_{mz}\sin(\psi-\varphi);$$
$$\vec{E} = \vec{e}_rE_r + \vec{e}_\theta E_\theta + \vec{e}_\varphi E_\varphi; \qquad (14)$$
$$E_r = E_{mr}\sin(\psi-\varphi); \quad E_\theta = E_{m\theta}\sin(\psi-\varphi); \quad E_\varphi = -E_{m\varphi}\cos(\psi-\varphi);$$
$$E_{mr} = \omega_{cn}A_{mr}; \quad E_{m\theta} = \omega_{cn}A_{m\theta}; \quad E_{mr} = \omega_{cn}Y. \qquad (15)$$

Составляющие магнитной индукции на основе (11)-(13) в декартовых и сферических координатах соответственно равны:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \left[-\vec{e}_x \sin\psi + \vec{e}_y \cos\psi\right]\frac{\partial Y}{\partial z} + \left[\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial y} - \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial x}\right] A_{mz}\cos(\psi-\varphi) + \\ +\vec{e}_z C_0 \Lambda \sin(\psi-\varphi) = \vec{e}_x B_x + \vec{e}_y B_y + \vec{e}_z B_z; \qquad (16)$$

$$B_x = A'_{mz}\sin\varphi\cos(\psi-\varphi) - \frac{(m-1)A_{mz}}{r\sin\theta}\cos\varphi\sin(\psi-\varphi) - \sin\psi\frac{\partial Y}{\partial z};$$

$$B_y = -A'_{mz}\cos\varphi\cos(\psi-\varphi) - \frac{(m-1)A_{mz}}{r\sin\theta}\sin\varphi\sin(\psi-\varphi) + \cos\psi\frac{\partial Y}{\partial z};$$

$$B_z = C_0\Lambda\sin(\psi-\varphi); \quad A'_{mz} = \frac{\partial A_{mz}}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial A_{mz}}{r\partial\theta}\cos\theta;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial Y}{r\partial\theta}\sin\theta; \quad \frac{\partial A_{mz}}{\partial z} = \frac{\partial A_{mz}}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial A_{mz}}{r\partial\theta}\sin\theta; \qquad (17)$$

$$\vec{B} = \vec{e}_r B_r + \vec{e}_\theta B_\theta + \vec{e}_\varphi B_\varphi; \qquad (18)$$

$$B_r = B_{mr}\sin(\psi-\varphi); \quad B_\theta = B_{m\theta}\sin(\psi-\varphi); \quad B_\varphi = B_{m\varphi}\cos(\psi-\varphi);$$

$$B_{mr} = C_0\Lambda\cos\theta - \sin\theta\left[\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{(m-1)A_{mz}}{r\sin\theta}\right]; \qquad (19)$$

$$B_{m\theta} = -C_0\Lambda\sin\theta - \cos\theta\left[\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{(m-1)A_{mz}}{r\sin\theta}\right]; \quad B_{m\varphi} = \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - A'_{mz}\right). \qquad (20)$$

Вектор Пойнтинга и его составляющие в сферических координатах:

$$\vec{\Pi} = \vec{E}\times\vec{H} = \vec{e}_r\Pi_r + \vec{e}_\theta\Pi_\theta + \vec{e}_\varphi\Pi_\varphi; \qquad (21)$$

$$\Pi_r = \mu_0^{-1}(E_{m\theta}B_{m\varphi} - E_{m\varphi}B_{m\theta})\sin(\psi-\varphi)\cos(\psi-\varphi) = 0{,}5\Pi_{mr}\sin 2(\psi-\varphi); \qquad (22)$$

$$\Pi_\theta = \mu_0^{-1}(E_{m\varphi}B_{mr} - E_{mr}B_{m\varphi})\sin(\psi-\varphi)\cos(\psi-\varphi) = 0{,}5\Pi_{m\theta}\sin 2(\psi-\varphi); \qquad (23)$$

$$\Pi_\varphi = \mu_0^{-1}(E_{mr}B_{m\theta} - E_{m\theta}B_{mr})\sin^2(\psi-\varphi) = \Pi_{m\varphi}\sin^2(\psi-\varphi). \qquad (24)$$

Обозначая постоянную интегрирования C_z, вводим обозначения:

$$Y = C_0 Y_0; \quad A_{mz} = C_z A_{0z}; \quad \alpha_z = C_z/C_0, \qquad (25)$$

Подставляем в ($E_{mr}B_{m\theta} - E_{m\theta}B_{mr}$) (15), (19), (20), получим:

$$\Pi_{m\varphi} = -\frac{\omega_{cn}C_0^2}{\mu_0}\left\{Y_0\Lambda + \alpha_z A_{0z}\left[\frac{\partial Y_0}{\partial z} + \frac{(m-1)\alpha_z A_{0z}}{r\sin\theta}\right]\right\}. \qquad (26)$$

Используя (21)-(24), раскрываем векторное произведение $(\vec{e}_r \times \vec{\Pi})$ и перейдем к декартовому базису:

$$(\vec{e}_r \times \vec{\Pi}) = \vec{e}_\varphi 0,5\,\Pi_{m\theta} \sin 2(\psi-\varphi) - \vec{e}_\theta \Pi_{m\varphi} \sin^2(\psi-\varphi) = \vec{e}_z \sin\theta\,\Pi_{m\varphi} \sin^2(\psi-\varphi) -$$
$$-\cos\theta(\vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi)\Pi_{m\varphi} \sin^2(\psi-\varphi) - 0,5\Pi_{m\theta} \sin 2(\psi-\varphi)(\vec{e}_x \sin\varphi - \vec{e}_y \cos\varphi).$$

Учитывая ортогональность системы тригонометрических функций и независимость амплитуд $\Pi_{m\varphi}$ и $\Pi_{m\theta}$ от φ, вычислим следующий интеграл:

$$\int_0^{2\pi} (\vec{e}_r \times \vec{\Pi})\, d\varphi = \vec{e}_z \pi \sin\theta\,\Pi_{m\varphi}. \tag{27}$$

Подставив (27) в (26) и в (1), получим угловой момент импульса волновой электромагнитной структуры:

$$\vec{L}_\Pi = -\frac{\pi\omega_{cn} C_0^2 \vec{e}_z}{\mu_0 c^2} \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \sin^2\theta \left\{ Y_0 \Lambda + \alpha_z A_{0z} \left[\frac{\partial Y_0}{\partial z} + \frac{(m-1)\alpha_z A_{0z}}{r \sin\theta} \right] \right\} d\theta. \tag{28}$$

Подставив (17) в (28) с учетом (25) и интегрируя по частям второе слагаемое с учетом равенства $r^3 Y_0(r=\infty)=0$, получим:

$$\alpha_z \int_0^\pi \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta \int_0^\infty A_{0z} r^3 \frac{\partial Y_0}{\partial r} dr - \alpha_z \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin^3\theta A_{0z} \frac{\partial Y_0}{\partial \theta} d\theta =$$
$$-\alpha_z \left[\int_0^\pi \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta \int_0^\infty Y_0 \left(3r^2 A_{0z} + r^3 \frac{\partial A_{0z}}{\partial r} \right) dr - \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi Y_0 \left(3\sin^2\theta\cos\theta A_{0z} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sin^3\theta \frac{\partial A_{0z}}{\partial \theta} \right) d\theta \right] = -\alpha_z \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi Y_0 \left(\frac{\partial A_{0z}}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial A_{0z}}{r\partial\theta}\sin\theta \right) d\theta = -\int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi Y_0 \frac{\partial A_{mz}}{\partial z} d\theta.$$

Учитывая (10), последний интеграл приводится к следующему виду:

$$-\int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi Y_0 \frac{\partial A_{mz}}{\partial z} d\theta = \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi Y_0 \Lambda\, d\theta. \tag{29}$$

Подставив (29) в (28), получим формулу расчета момента импульса, которую разбиваем на две части:

$$\vec{L}_{\Pi} = -\frac{\pi\omega_{cn}C_0^2\vec{e}_z}{\mu_0 c^2}\int_0^{\infty} r^3 dr\int_0^{\pi}\sin^2\theta\left\{2Y_0\Lambda + \frac{(m-1)(\alpha_z A_{0z})^2}{r\sin\theta}\right\}d\theta = \vec{L}_{\Pi 1} + \vec{L}_{\Pi 2}. \quad (30)$$

В [8] показано, что интеграл от функции $Y_0\Lambda$ в (30) принимает вид:

$$\vec{L}_{\Pi 1} = -\frac{(m-1)\pi\omega_{cn}C_0^2\vec{e}_z}{\mu_0 c^2}\int_0^{\infty} R^2 r^2 dr\int_0^{\pi} P^2\sin\theta d\theta.$$

Подставив $\vec{L}_{\Pi 1}$ в (30) и учитывая $Y_0 = RP$, получим:

$$\vec{L}_{\Pi} = -\frac{2\pi(m-1)\omega_{cn}C_0^2\vec{e}_z}{\mu_0 c^2}\int_0^{\infty} r^2 dr\int_0^{\pi}\sin\theta\left\{Y_0^2 + \frac{(\alpha_z A_{0z})^2}{2}\right\}d\theta. \quad (31)$$

Проекция результирующего орбитального момента количества движения L_z на ось z будет состоять из момента импульса электромагнитного поля L_{Π} (31) и проекции на ось z орбитального момента импульса электрона, которая равна – $\hbar$. Знак минус указывает на то, что вектор Пойнтинга (21) – (24), (26) волновой электромагнитной структуры совпадает с направлением орбитального вращения электрона (по часовой стрелке). При этом результирующий орбитальный момент количества движения системы волнового ЭМП и электрона должен соответствовать научно-обоснованному значению:

$$L_z = L_{\Pi} - \hbar = -m\hbar.$$

Применив записанное условие к (31), определим постоянную интегрирования C_0^2:

$$C_0^2 = \hbar\mu_0 c^2\left[2\pi\omega_{cn}\int_0^{\infty} r^2 dr\int_0^{\pi}\sin\theta\left\{Y_0^2 + \frac{(\alpha_z A_{0z})^2}{2}\right\}d\theta\right]^{-1}. \quad (32)$$

Плотность энергии электрического поля на основе (26) равна:

$$w_E = 0{,}5\varepsilon_0\vec{E}^2 = 0{,}5\varepsilon_0\omega_{cn}^2 C_0^2\left[Y_0^2 + \left(\alpha_z A_{0z}\right)^2\sin^2\left(\psi - \varphi\right)\right].$$

Формула электрической энергия поля с учетом (32) примет вид:

$$W_E = \pi\varepsilon_0\omega_{cn}^2 C_0^2 \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \left(Y_0^2 + 0,5(\alpha_z A_{0z}\right)^2 \sin\theta d\theta = 0,5\hbar\omega_{cn}. \qquad (33)$$

Энергию магнитной составляющей определим на основе преобразования типовой формулы следующим образом:

$$\begin{aligned} 2W_H &= \int_V \left(\vec{H}\cdot\vec{B}\right)dV = \int_V \vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}dV = \int_V \mathrm{div}\left(\vec{A}\times\vec{H}\right)dV + \int_V \vec{A}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}dV = \\ &= \oint_{S(r_{гр})} \left(\vec{A}\times\vec{H}\right)d\vec{S} + \varepsilon_0 \int_V \vec{A}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}dV = \varepsilon_0 \int_V \vec{A}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}dV. \end{aligned} \qquad (34)$$

Здесь поверхностный интеграл вычисляется на границе области интегрирования, которая лежит на бесконечности, где $\vec{A}(r_{гр} = \infty) = 0$. При подстановке (8) и (14) в (34) формула энергии магнитного поля примет вид:

$$W_H = \pi\varepsilon_0\omega_{cn}^2 C_0^2 \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \left(Y_0^2 + 0,5(\alpha_z A_{0z}\right)^2 \sin\theta d\theta = 0,5\hbar\omega_{cn}. \qquad (35)$$

Полная энергия электромагнитной волновой структуры будет определяться только частотой колебания ω_{cn} электромагнитного процесса и, согласно (33) и (35), имеет простой вид:

$$W = W_E + W_H = \hbar\omega_{cn}.$$

IV. Обсуждение

Рассмотрен пример математического моделирования момента импульса, согласующегося с энергетическими характеристиками замкнутой волновой электромагнитной структуры, *являющейся решением однородного волнового уравнени*я [8-9]. Эта модель позволяет реализовать многократный момент импульса, направление которого перпендикулярно азимутальному направлению циркуляции электромагнитной энергии волны (вдоль оси z). Это означает, что в такой электромагнитной структуре реализуется единственная форма момента импульса, которая подтверждается научными положениями, сформулированными в *утверждениях 1* и *2*.

Таким образом, критерии электромагнитных моментов импульса, базирующихся на понятиях вихревых и потенциальных характеристиках вектора Пойнтинга более конкретны по сравнению с критериями, основанными на первичных характеристиках поля в [1-5].

Получено, что замкнутая орбитальная электромагнитная волна характеризуется квантом энергии $\hbar\omega_{cn}$, где ω_{cn} частота колебания орбитального электромагнитного поля.

Рассмотрим физический смысл орбитальной замкнутой электромагнитной волны, определенной из решения однородного волнового дифференциального уравнения при кулоновской калибровке.

Однородные дифференциальные уравнения описывают свободные процессы физических систем, протекающие за счет внутренних запасов энергии, то орбитальное ЭМП должно образовываться за счет собственной энергии электрона.

При решении однородного волнового уравнения в [9] определено следующее выражение коэффициента при временной производной:

$$\omega_{cn}^2\hbar^2 = 2m_0c^2\left[W_n - U(r)\right],$$

где W_n, $U(r) = U_n$ – полная и потенциальная энергии орбитального электрона на n энергетическом уровне соответственно. Из этого равенства получим следующее выражение кванта энергии замкнутой электромагнитной волны:

$$\hbar\omega_{cn} = \sqrt{2W_{oe}(W_n - U_n)} = \sqrt{2W_{oe}\left|W_n\right|} = \sqrt{W_{oe}\left|U_n\right|}; \qquad (36)$$
$$W_{oe} = m_0c^2; \qquad U_n = -e^2(4\pi\varepsilon_0 r_n)^{-1},$$

где m_0 – масса покоя электрона, W_{oe} – собственная энергия электрона.

В (36) с левой стороны представлена энергия замкнутой орбитальной электромагнитной волны. С правой стороны имеет место усредненная энергия от произведения собственной энергии электрона на модуль потенциальной энергию электрона в атоме.

V. Заключение

Вихревая составляющая вектора Пойнтинга волновой электромагнитной структуры является источником момента импульса, тогда как связанная с законом сохранения электромагнитной энергии потенциальная составляющая вектора Пойнтинга не создает момента импульса.

Разработана методика математического моделирования замкнутой электромагнитной волны, которая в рамках классической теории ЭМП позволила соединить описание орбитальных многократных моментов количества движения с квантовым описанием ее энергии.

Подтверждено научное положение, что источником энергии орбитальной замкнутой электромагнитной волны может являться только собственная энергия электрона, а физической причиной дискретных орбит электрона в атоме является наличие устойчивых замкнутых электромагнитных орбитальных волн, которые объясняют дискретность моментов количества движения и магнитных моментов.

Поступила в редакцию 30.08.2024
Принята к публикации 16.12.2024
Received 30.08.2024
Accepted 16.12.2024

Библиографический список

[1] Allen L., Babiker M., Padgett M.J. IV The orbital angular momentum of light // Progress in Optics. 1999. № 39 (C). P. 291-372. DOI: 10.1016/S0079-6638(08)70391-3

[2] Stewart A.M. Angular momentum of the electromagnetic field: The plane wave paradox resolved // European Journal of Physics. 2005. № 26 (4). P. 635-641. DOI: 10.1088/0143-0807/26/4/008

[3] Cameron R.P., Speirits F.C., Gilson C.R., Allen L., Barnett S.M. The azimuthal component of Poynting's vector and the angular momentum of light // Journal of Optics. 2015. № 17 (12). P. 8. DOI: 10.1088/2040-8978/17/12/125610

[4] Харитонов С.И., Волотовский С.Г., Хонина С.Н. Вычисление момента импульса электромагнитного поля внутри волновода с абсолютно проводящими стенками // Компьютерная оптика. 2018. № 42 (4). С. 588-605. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605

[5] Barnett S.M., Allen L., Cameron R.P., Gilson C.R., Padgett M.J., Speirits F.C., Yao A.M. On the natures of the spin and orbital parts of optical angular momentum // Journal of Optics. 2016. № 18 (6). P. 11. DOI: 10.1088/2040-8978/18/6/064004

[6] Болотовский Б.М. Оливер Хевисайд. М.: Наука, 1985. – 260 с.

[7] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. – 831 с.

[8] Меньшов Е.Н. Представление вектора Пойнтинга через электрические характеристики электротехнических систем. Часть 2. Моделирование плотности тока // Интеллектуальная Электротехника. 2022. № 2 (18). *С. 30-45*. DOI: 10.46960/2658-6754_2022_2_30

[9] Меньшов Е.Н. Расширение возможностей классической теории электромагнитного поля // Научное обозрение. Физико-математические науки. 2020. № 1. С. 4. [Электронный ресурс]. URL: https://physics-mathematics.ru/ru/article/view?id=92 (дата обращения 30.06.2024). DOI: 10.17513/srpm.92

References

[1] L. Allen, M. Babiker and M.J. Padgett, “IV The orbital angular momentum of light”, *Progress in Optics*, vol. 39, no. C, pp. 291-372, 1999. DOI: 10.1016/S0079-6638(08)70391-3

[2] A.M. Stewart, “Angular momentum of the electromagnetic field: The plane wave paradox resolved”, *European Journal of Physics*, vol. 26, no. 4, pp. 635-641, May 2005. DOI: 10.1088/0143-0807/26/4/008

[3] R.P. Cameron, F.C. Speirits, C.R. Gilson, L. Allen and S.M. Barnett, “The azimuthal component of Poynting's vector and the angular momentum of light”, *Journal of Optics*, vol. 17, no. 12, pp. 8, Dec. 2015. DOI: 10.1088/2040-8978/17/12/125610

[4] S.I. Kharitonov, S.G. Volotovsky and S.N. Khonina, “Calculation of the angular momentum of an electromagnetic field inside a waveguide with absolutely conducting walls”, *Computer Optics*, vol. 42, no. 4, pp. 588-605, 2018. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605

[5] S.M. Barnett, L. Allen, R.P. Cameron, C.R. Gilson, M.J. Padgett, F.C. Speirits and A.M. Yao, “On the natures of the spin and orbital parts of optical angular momentum”, *Journal of Optics*, vol. 18, no. 6, pp. 11, 2018. DOI: 10.1088/2040-8978/18/6/064004

[6] B.M. Bolotovsky, *Oliver Heaviside [Oliver Heaviside]*. Moscow: Nauka, 1985 (in Russian).

[7] G. Korn and T. Korn, Mathematical handbook for scientists and engineers. Moscow: Nauka, 1973.

[8] E.N. Menshov, “Representation of the Poynting vector via electrical characteristics of electrical systems. Part 2. Simulation of current density”, *Smart Electrical Engineering*, vol. 2, no. 18, *pp. 30-45, 2022*. DOI: 10.46960/2658-6754_2022_2_30

[9] E.N. Menshov, “Expanding the capabilities of the classical theory of the electromagnetic field”, *Scientific Review. Physics and Mathematics*, no. 1, pp. 4, 2020. [Abstract]. Available at: https://physics-mathematics.ru/ru/article/view?id=92. DOI: 10.17513/srpm.92

Приложение А. *Методика вычисления момента импульса.*

Подынтегральную функцию в (4) можно представить в сферических координатах:

$$(\vec{r}\times\operatorname{rot}\vec{C})=\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right]\vec{e}_\varphi+\left[\frac{\partial C_r}{\partial\theta}-\frac{(rC_\theta)}{\partial r}\right]\vec{e}_\theta,$$

и проинтегрировать интеграл по частям:

$$\vec{L}_C=\frac{1}{c^2}\int_0^{r_{\text{гр}}}r^2dr\left\{\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}\vec{e}_\varphi dC_r+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\vec{e}_\theta\sin\theta dC_r\right\}-$$

$$-\frac{1}{c^2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left\{\int_0^{2\pi}\vec{e}_\varphi d\varphi\int_0^{r_{\text{гр}}}r^2d(rC_\varphi)+\int_0^{2\pi}\vec{e}_\theta d\varphi\int_0^{r_{\text{гр}}}r^2d(rC_\theta)\right\}=$$

$$=\frac{1}{c^2}\int_0^{r_{\text{гр}}}r^2dr\left\{\int_0^{\pi}d\theta\left[\vec{e}_\varphi C_r\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}C_r\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right]+\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\vec{e}_\theta C_r\sin\theta\Big|_0^{\pi}-\right.\right.$$

$$-\int_0^{\pi} C_r\left(\left[\vec{e}_\theta\cos\theta+\sin\theta\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\right)d\theta\right\}-\frac{1}{c^2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left\{\int_0^{2\pi}\vec{e}_\varphi d\varphi\left[r^3C_\varphi\Big|_0^{r_{\text{гр}}}-2\int_0^{r_{\text{гр}}}r^2C_\varphi dr\right]+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}\vec{e}_\theta d\varphi\left[r^3C_\theta\Big|_0^{r_{\text{гр}}}-2\int_0^{r_{\text{гр}}}r^2C_\theta dr\right]\right\}=\frac{1}{c^2}\int_0^{r_{\text{гр}}}r^2dr\left[2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}(C_\theta\vec{e}_\theta+C_\varphi\vec{e}_\varphi)d\varphi-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}C_r\left(\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}+\vec{e}_\theta\cos\theta+\sin\theta\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\right)d\varphi\right]=\frac{2}{c^2}\int_V\left(C_r\vec{e}_r+C_\theta\vec{e}_\theta+C_\varphi\vec{e}_\varphi\right)dV.$$

При вычислении $\vec{L}_C$ использовалось исходное граничное условие $C(r_{\text{гр}}) = 0$ и учитывались следующие преобразования [7]:

$$\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}=-\vec{e}_r;\quad \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}+\vec{e}_\theta\cos\theta+\sin\theta\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}=-2\sin\theta\vec{e}_r.$$

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ
INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Меньшов Евгений Николаевич, доктор технических наук, профессор Ульяновского государственного технического университета, г. Ульяновск, Российская Федерация.

Eugene N. Menshov, D. Sci (Eng.), professor of the Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russian Federation.